Wes-Kaapse Regering

Onderwys

Wes-Kaap Onderwys Departement

TELEMATIESE

LEERMATERIAAL 2019

Graad 12

Wiskunde

Liewe Graad 12-leerder

In 2019 word daar 8 Telematiese lesse oor Graad 12-inhoud en 6 Telematiese lesse oor Graad 11-inhoud aangebied. Die Graad 11-inhoud sal in die Junie-eksamen, Septembereksamen en Jaareindeksamens in Graad 12 geassesseer word. Dit is dus belangrik dat jy 'n studierooster opstel wat ook ruimte laat vir die hersiening van die Graad 11-inhoud.

Die program in hierdie boek bevat die datums en tye vir al die Graad 12 en Graad 11 Telematiese lesse. Ons beveel aan dat jy die Graad 12 sowel as die Graad 11 Telematiese lesse bywoon aangesien dit jou sal help met die hersiening van Graad 11-inhoud. Die werkboek bevat egter net die inhoud van die Graad 12 Telematiese lesse. Jy kan die Graad 11-materiaal van die Telematiese webtuiste aflaai. Maak asseblief seker dat jy hierdie werkboek na elke Telematiese les saambring.

In die Graad 12-eksamen sal Trigonometrie $\pm$ 50 punte en Meetkunde $\pm$ 40 punte van die 150 punte vir Vraestel 2 tel.

Jou onderwyser sal aandui presies watter stellings jy vir eksamendoeleindes moet bestudeer. Daar is altesaam 6 bewyse van stellings wat jy moet ken omdat dit geëksamineer kan word. Hierdie stellinigs word almal met (**) in die Telematiese werkboek aangedui: 4 is Graad 11-stellings en 2 is Graad 12-stellings.

By die skool sal jy 'n boek ontvang met die titel "Graad 12 Wenke vir sukses". Daarin sal jy 'n indeling kry van watter persentasie aan die verskillende onderwerpe in Wiskunde toegeken word. Maak seker dat jy 'n QR-kode-skandeerder aflaai; dit sal jou in staat stel om die verskillende QR-kodes te skandeer.

Aan die begin van elke les sal die aanbieder 'n opsomming van die belangrike konsepte gee en julle sal saam deur die aktiwiteite werk. Jy moet asseblief voorbereid kom: hou 'n pen, genoeg skryfpapier (verkieslik 'n hardeband oefenboek) en jou wetenskaplike sakrekenaar byderhand.

Neem deel aan elke les deur vrae te stel en die oefeninge te doen. Sms of e-pos jou antwoorde na die ateljee wanneer dit gevra word.

Onthou:

"Sukses is nie 'n eenmalige gebeurtenis nie; dit is die gevolg van gereelde en konstante harde werk."

ALLES VAN DIE BESTE. Mag jy die sukses behaal wat jy verdien!

2019 Wiskunde Telematics Program

Dag	Datum	Tyd		Vak	Onderwerp
Kwartaal 1: 9 Jan – 15 Maart					
Dinsdag	12 Februarie	15:00 – 16:00	12	Mathematics	Trigonometry Revision
Woensdag	13 Februarie	15:00 – 16:00	12	Wiskunde	Trigonometrie Hersiening
Kwartaal 2: 2 April to 14 Junie					
Mondag	8 April	15:00 – 16:00	12	Mathematics	Trigonometry
Dinsdag	9 April	15:00 – 16:00	12	Wiskunde	Trigonometrie
Woensdag	15 May	15:00 – 16:00	11	Mathematics	Geometry
Donderdag	16 May	15:00 – 16:00	11	Wiskunde	Meetkunde
Woensdag	22 May	15:00 – 16:00	12	Mathematics	Geometry
Donderdag	23 May	15:00 – 16:00	12	Wiskunde	Meetkunde
Kwartaal 3: 9 Julie – 20 September					
Mondag	29 July	15:00 – 16:00	12	Mathematics	Differential Calculus
Dinsdag	30 July	15:00 – 16:00	12	Wiskunde	Differentiaalrekening
Woensdag	07 Augustus	15:00 – 16:00	11	Mathematics	Functions
Mondag	12 Augustus	15:00 – 16:00	11	Wiskunde	Funksies
Kwartaal 4: 1 Oktober – 4 Desember					
Dinsdag	15 Oktober	15:00 – 16:00	11	Mathematics	Paper 2 Revision
Woensdag	16 Oktober	15:00 – 16:00	11	Wiskunde	Vraestel 2 Hersiening

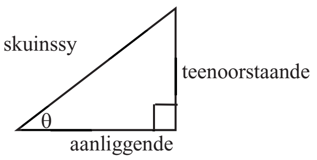
Sessie 1: Trigonometrie

- **Definisie van trigonometriese verhouding:**
  - In 'n reghoekige Δ

$$Sin\theta = \frac{teenoorstande}{skuinsy}$$

$$Cos\theta = \frac{aanliggende}{skuinsy}$$

$$Tan\theta = \frac{teenoorstaande}{aanliggende}$$

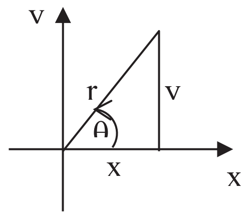


  - In 'n Cartesiese Vlak

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{y}{r}$$

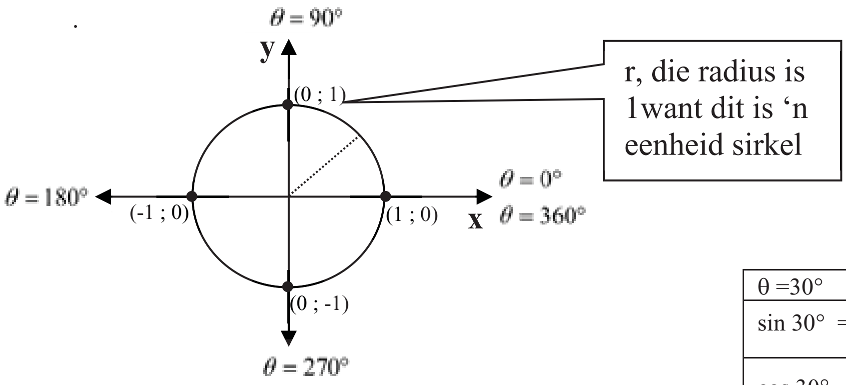
$$\text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{y}{x}$$

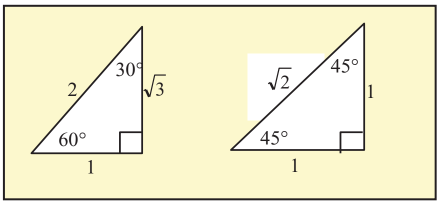


- **Spesiale Hoeke**
  - **0°, 90°, 180°, 270°, 360°** kan van **die volgende eenheid sirkel bepaal word**

.

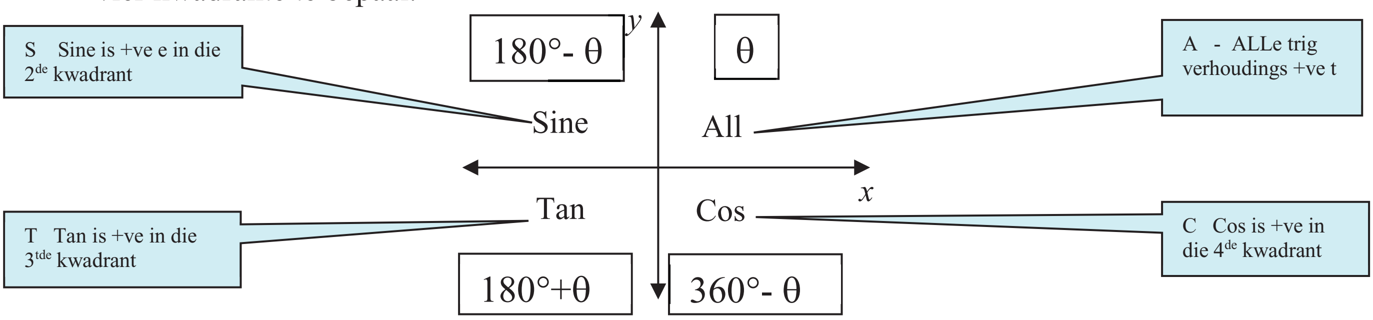


30°, 45° and 60° kan van die volgende twee driehoeke bepaal



θ =30°	θ = 45°	θ = 60°
sin 30° = $\frac{1}{2}$	sin 45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$	sin 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	cos 45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$	cos 60° = $\frac{1}{2}$
tan 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$	tan 45° = 1	tan 60° = $\sqrt{3}$

- Die **"CAST" reël** kan gebruik word om die teken van die trigonometriese verhouding in enige van vier kwadrante te bepaal.



Die trigonometriese funksie van hoeke (180°±θ) or (360°±θ) or (-θ) word → ± Trigonometriese funksie van θ

Die teken word bepaal deur gebruik te maak van "CAST" **reël**

$(180°-\theta)$	$(180°+\theta)$	$(360°-\theta)$	$(360°+\theta)$	$(-\theta)$
$\sin(180°-\theta) = \sin\theta$	$\sin(180°+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(360°-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(360°+\theta) = \sin\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(180°+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(360°-\theta) = +\cos\theta$	$\cos(360°+\theta) = \cos\theta$	$\cos(-\theta) = +\cos\theta$
$\tan(180°-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(180°+\theta) = +\tan\theta$	$\tan(360°-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(360°+\theta) = \tan\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

- **TRIGONOMETRIESE IDENTITEITE**

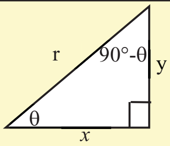
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (\cos\theta \neq 0)$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta, \qquad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

- **Ko-verhoudings** →

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$



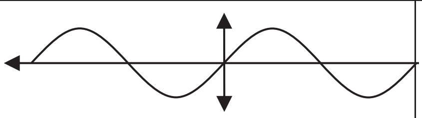
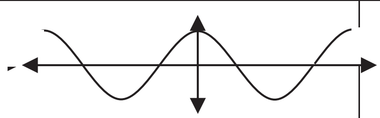
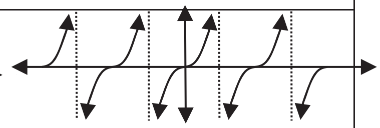
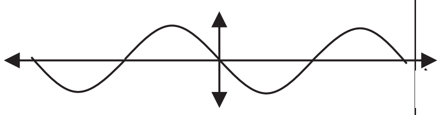
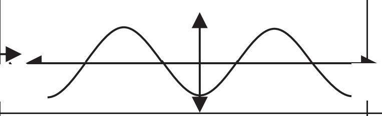
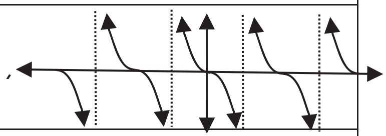
$\sin(90° + \theta) = +\cos\theta$

$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

- **Trigonometriese Vergelykings**

	$\sin\theta = 0{,}707$	$\cos\theta = -0{,}866$	$\tan\theta = -1$
1. Bepaal die skerp ∠ 2. Gebruik die teken om te besluit in watter kwadrante θ is.. 3. Bereken θ in die interval $[0°;\ 360°]$ 4. Skryf neer die algemene oplossing	skerp ∠ = $\sin^{-1}(0{,}707) = 45°$ $\therefore\ \theta = 45°$ or $\theta = 180° - 45°$ $\therefore\ \theta = 45°$ or $\theta = 135°$ $\therefore\ \theta = 45° + k360°$ or $\theta = 135° + k360°$ where $k \in Z$	skerp ∠ = $\cos^{-1}(0{,}866) = 30°$ $\therefore\ \theta = 180° - 30°$ or $\theta = 180° + 30°$ $\therefore\ \theta = 150°$ or $\theta = 210°$ $\therefore\ \theta = \pm 150°$ $\therefore\ \theta = \pm 150 + k360°$ where $k \in Z$	skerp ∠ = $\tan^{-1}(1) = 45°$ $\therefore\ \theta = 180° - 45°$ $\therefore\ \theta = 135°$ $\therefore\ \theta = 135° + k180°$ $k \in Z$

TRIGONOMETRIESE GRAFIEKE

	Sine Funksie	**Cosine Funksie**	**Tangent Funksie**
Vergelyking	$y = a\sin k(x+p) + q$	$y = a\cos k(x+p) + q$	$y = a\tan k(x+p) + q$
Form			
a > 0			
a < 0			
Amplitude	a	a	
Periode	$\dfrac{360°}{k}$	$\dfrac{360°}{k}$	$\dfrac{180°}{k}$

OPLOSSING VAN DRIEHOEKE

- **Oppervlaktereël**

$$\text{Area of } \Delta ABC = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

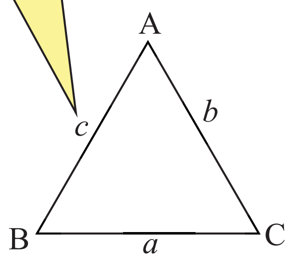
- **Sinusreël**

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \textbf{Or} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- **Kosinusreël**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \text{or} \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

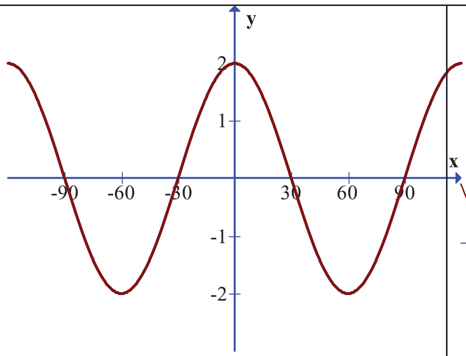
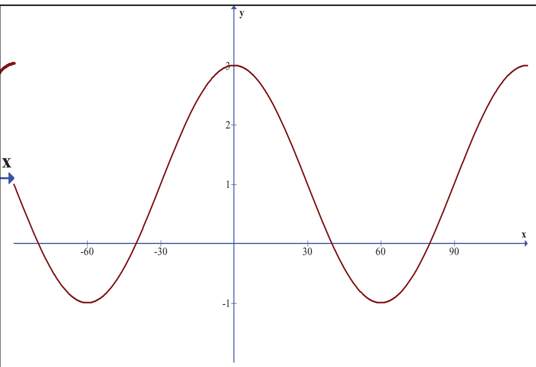
Note:
"*c*" refers to the side of the triangle opposite to angle C that is the side



TRIGONOMETRIE OPSOMMING

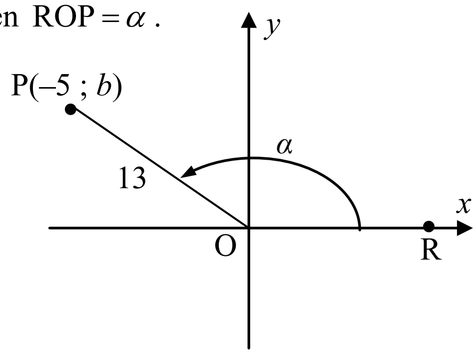
Tipe Vraag	Opsomming van Stappe	Voorbeeld
1. Bereken die waarde van 'n trig uitdrukkings sonder die gebruik van sakrekenaar.	Jy gaan dan een of meer van die volgende benodig, ruwe skets, spesiale driehoeke of reduksie formula	1.1 As $13\cos\alpha = 5$ en $\tan\beta = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in [0°;\ 270°]$ en $\beta \in [0°;\ 180°]$. Dit is gegee dat, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha$ Bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, a) $\sin\alpha$ b) $\sin(\alpha+\beta)$ 1.2 Bereken: a) $\dfrac{\cos(-210^\circ).\sin^2 405^\circ.\cos 14^\circ}{\tan 120^\circ.\sin 104^\circ}$ b) $\sin 70°\cos 40° - \cos 70°\sin 40°$
2. As 'n trig verhouding gegee is as 'n veranderlike, gee die ander trig verhoudings in terme van die gegewe veranderlike..	Teken 'n ruwe skets met die gegewe hoek. Twee van die sye van die driehoek kan ingevul word. Die 3de sy kan dan bepaal word deur gebruik te maak van Pythagoras. Stel elkeen van die hoeke in die vraag in terme van hoek in die ruwe skets.	2. As $\sin 27° = q$, skryf die volgende interme van q. a) $\sin 117°$ b) $\cos(-27°)$
3. Vereenvoudig 'n Trigonometriese Uitdrukking.	Gebruik die reduksie formula of enige identiteite dit sluit die saamgestelde identiteite in. Faktoriseer maar moontlik en maak altyd seker alle moontlike identiteite word gebruik.	3. Vereenvoudig: a) $\dfrac{\cos(720°-x)\ .\ \sin(360°+x)\ .\ \tan(x-180°)}{\sin(-x)\ .\ \cos(90°-x)}$ b) $\dfrac{\sin(90°+x)\ .\ \tan(360°+x)}{\sin(180°+x)\ .\ \cos(90°-x)+\cos(540°+x).\cos(-x)}$ c) $\dfrac{\sin^2 x\cos x + \cos^3 x}{\cos x}$ d) $\dfrac{\sin^2 x\cos x}{1-\cos^2 x}$
4. Bewys 'n gegewe identiteit.	Begin met eenkant van die identiteit en eenvoudig dit deur gebruik te maak van reduksie formula en alle identiteite tot dat dit gelyk aan die anderkant van die identiteit is.	Bewys dat a) $\dfrac{\tan x\ .\ \cos^3 x}{1-\sin^2 x+\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}\sin x$ b) $\cos^2(180°-x)+\cos(90°+2x)\tan(360°-x) = \sin^2 x + 1$
5. Los op 'n trigonometriese vergelyking.	Bepaal die skerp hoek deur $\sin^{-1}(0{,}435)$ te bepaal. Bereken die twee oplosings in interval $x \in [0°;\ 360°]$. Bepaal die algemene oplossing. Gebruik verskillende waardes vir k in die algemene oplossing om x te bepaal binne die gegewe interval	Los op vir $x \in [-180°;\ 360°]$ a) $\sin x = -0{,}435$ b) $\cos 2x = 0{,}435$ c) $\tan\frac{1}{2}x - 1 = 0{,}435$

Tipe Vraag	**Opsomming van Stappe**	**Voorbeeld**
6. Skets 'n trig grafiek.	Skets eerste die grafiek van $y = 2\cos 3x$ binne die interval $[-120°;\ \ 120°]$, Skuif die grafiek dan een eenheid op, en nou kan jy die gedeelte van die grafiek uitveer wat buite die gegewe gebeid is.	Skets die volgende grafieke b) $y = 2\cos 3x\ \ +1$ for $x \in [-90°;\ \ 120°]$ c) $y = -\sin(x + 60)$ for $x \in [-240°;\ \ 120°]$
7.Bepaal die oppervlakte van 'n driehoek.	As dit 'n reghoekige driehoek is, dan is $oppervlakte = \frac{1}{2} basis \times hoogte$. As dit nie 'n driehoekige driehoek is nie gebruik ons die oppervlakte reël Oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab\sin C$	ΔABC, met $\angle B = 104{,}5°$, $AB = 6cm$ en $BC = 9cm$. Bereken, korret tot een desimale plekke die oppervlakte van ΔABC.
8. Bepaal 'n onbekende sy of hoek.	Trek 'n driehoek met die gegewe sye en hoeke. As dit nie 'n reghoekige driehoek is nie word die sinus en/of kosinus reels gebruik.	a) ΔABC, met $\angle B = 104{,}5°$, $AB = 6cm$ en $BC = 9cm$. Bereken die lengte van AC. b) ΔABC, met $\angle C = 43{,}2°$, $AB = 4{,}5cm$ en $BC = 5{,}7cm$. Bereken die grootte van $\angle A$.

SKETS VAN 'n TRIG GRAFIEK			
Bereken die periode	***Skryf neer die amplitude as dit 'n sinus of cosinus grafiek is.***	***Identifiseer die form van die grafiek en teken die sinus, cosinus of tan grafiek met bepaalde periode en amplitude. Merk die verskillende x-afsnitte.***	***Enige vertikale of horisontale transformasies word dan in ag geneem***
SKETS $y = 2\cos 3x\ \ +1$ for $x \in [-90°;\ \ 120°]$			
Periode = $\frac{360°}{3} = 120°$	Amplitude = 2		

VRAAG 1

1.1 In die figuur hieronder is die punt P(–5 ; *b*) op die Cartesiese vlak aangedui. OP = 13 eenhede en $\hat{ROP} = \alpha$.



Bepaal die waarde van die volgende **sonder om 'n sakrekenaar te gebruik**:

1.1.1 $\cos\alpha$ (1)

1.1.2 $\tan(180° - \alpha)$ (3)

1.2 Beskou: $\dfrac{\sin(\theta - 360°)\sin(90° - \theta)\tan(-\theta)}{\cos(90° + \theta)}$

1.2.1 Vereenvoudig $\dfrac{\sin(\theta - 360°)\sin(90° - \theta)\tan(-\theta)}{\cos(90° + \theta)}$ tot 'n enkele trigonometriese verhouding. (5)

1.2.2 Vervolgens, of andersins, los op vir θ, **sonder om 'n sakrekenaar te gebruik**, as $0° \leq \theta \leq 360°$:

$$\frac{\sin(\theta - 360°)\sin(90° - \theta)\tan(-\theta)}{\cos(90° + \theta)} = 0{,}5$$ (3)

1.3 1.3.1 Bewys dat $\dfrac{8}{\sin^2 A} - \dfrac{4}{1+\cos A} = \dfrac{4}{1-\cos A}$. (5)

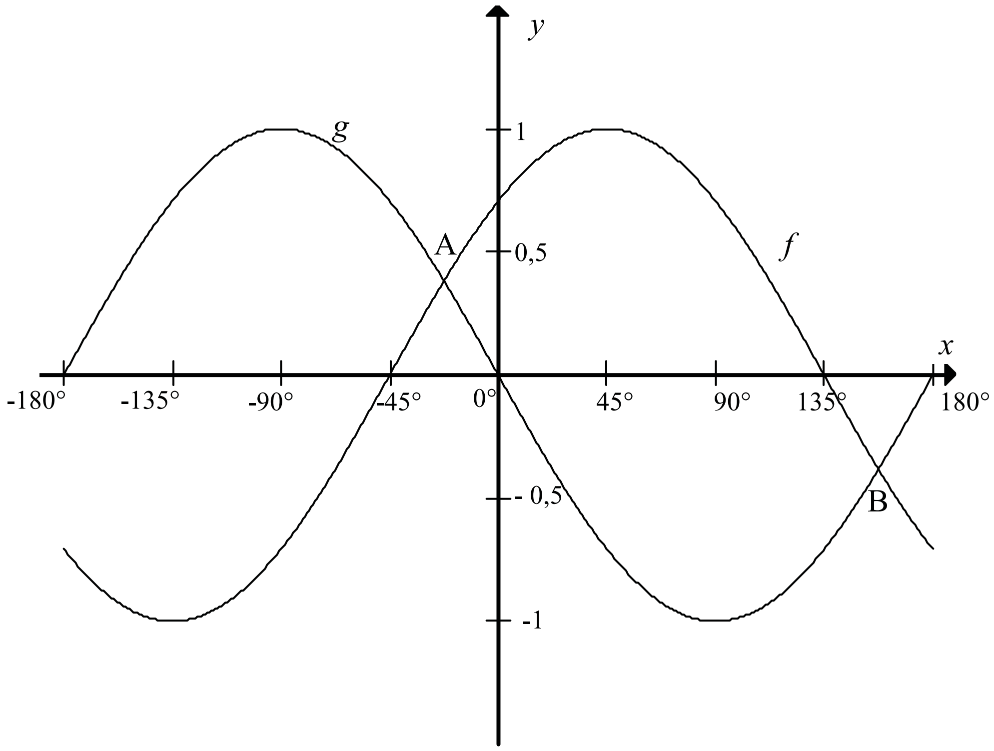
1.3.2 Vir watter waarde(s) van A in die interval $0° \leq A \leq 360°$ is die identiteit in VRAAG 5.3.1 ongedefinieerd? (3)

1.4 Bepaal die algemene oplossing van $8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$. (6)

[26]

VRAAG 2

Die diagram hieronder toon die grafieke van $f(x) = \cos(x + p)$ en $g(x) = q \sin x$ vir die interval $-180° \leq x \leq 180°$.



2.1 Bepaal die waarde van p en q. (2)

2.2 Die grafieke sny mekaar by A(–22,5° ; 0,38) en B. Bepaal die koördinate van B. (2)

2.3 Bepaal die waarde(s) van x in die interval $-180° \leq x \leq 180°$ waarvoor $f(x) - g(x) < 0$. (2)

2.4 Die grafiek f word met 30° na links geskuif om 'n nuwe grafiek h te vorm.

2.4.1 Skryf die vergelyking van h in die eenvoudigste vorm neer. (2)

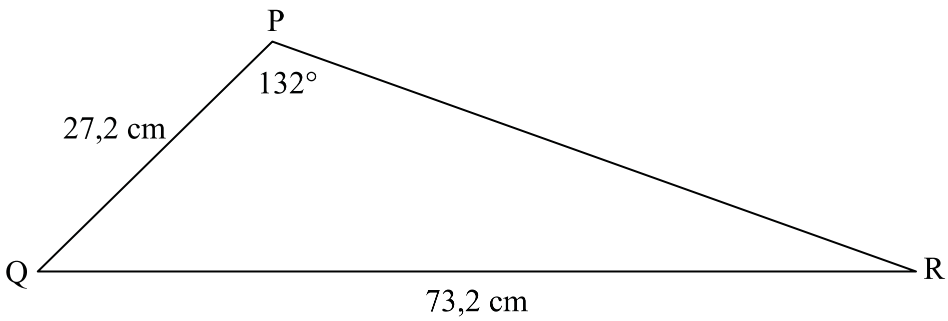
2.4.2 Skryf die waarde van x neer waarvoor h 'n minimum in die interval $-180° \leq x \leq 180°$ sal hê. (1)

[9]

VRAAG 3

3.1 Bewys dat in enige skerphoekige ΔABC, $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin C}{c}$. (5)

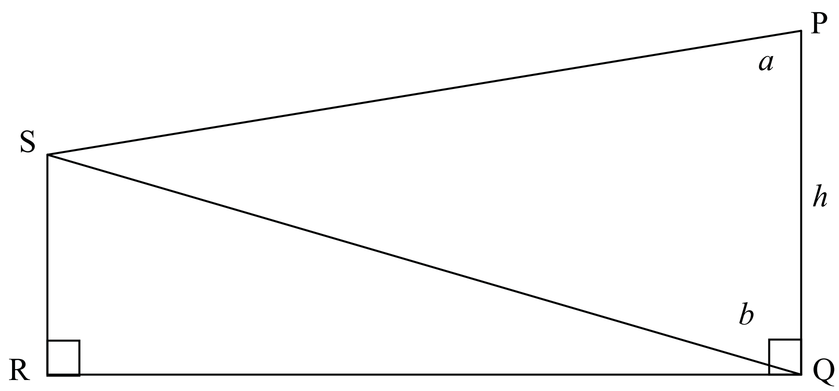
3.2 In ΔPQR is $\hat{\text{P}} = 132°$, PQ = 27,2 cm en QR = 73,2 cm.



3.2.1 Bereken die grootte van $\hat{\text{R}}$. (3)

3.2.2 Bereken die oppervlakte van ΔPQR. (3)

3.3 In die figuur hieronder is $\text{S}\hat{\text{P}}\text{Q} = a$, $\text{P}\hat{\text{Q}}\text{S} = b$ en PQ = h. PQ en SR is loodreg op RQ.



3.3.1 Bepaal die afstand SQ in terme van a, b en h. (3)

3.3.2 Toon vervolgens dat $\text{RS} = \dfrac{h \sin a \cos b}{\sin(a+b)}$. (3)

[17]

Sessie 2: TRIGONOMETRIE(± 50/150 Punte)

Saamgestelde en Dubbel Hoeke

Ten einde hierdie gedeelte te bemeester is dit die beste om die formules hieronder leer. Hierdie formules sal ook gegee word op die formuleblad in die eksamen vraestel

- Saamgestelde hoek identiteite:

(a) $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

(b) $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A$

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

- Dubbelhoek Identiteite

(c) $\sin 2A=2\sin A\cos A$

(d) $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$= 1-2\sin^2 A$

$= 2\cos^2 A-1$

Verwys as dubbel hoek formule

Wanneer twee hoeke bygevoeg of afgetrek word om 'n nuwe hoek te vorm, word 'n saamgestelde of 'n dubbelhoek

Aan die einde van die afdeling moet jy die volgende kan doen vir eksamendoeleindes:

A. Aanvaar die saamgestelde hoek formule $\boxed{\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B}$ en gebruik dit om die fomules hier onder af te lei:

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A$

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$\cos 2A=1-2\sin^2 A$

$\cos 2A=2\cos^2 A-1$

$\sin 2A=2\sin A\cos A$

Onthou!

Ko-funksies

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

Negatiewe Hoeke

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=+\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

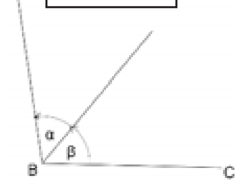
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

B. Gebruik die saamgestelde en dubbel hoek formule om:

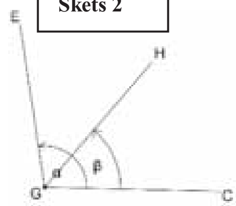
a. Evalueer 'n uitdrukking sonder om 'n sakrekenaar te gebruik
b. Vereenvoudiging van trigonometriese uitdrukkings
c. Bewys van Identiteite
d. Oplos van trigonometriese vergelykings (beide spesifieke en algemene oplossings)

Die sketse hieronder gee 'n visuele aanduiding van saamgestelde en dubbel hoeke.

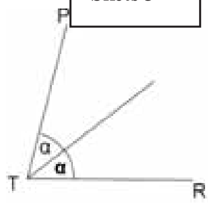
Skets 1



Skets 2



Skets 3



Skets 1: Die saamgestelde hoek $A\hat{B}C$ is gelyk aan die som van α en β. bv. $75° = 45° + 30°$

Skets 2: Die saamgestelde hoek $E\hat{G}H$ is gelyk aan die verskil van α en β. bv. $15° = 60° - 45°$ of $15° = 45° - 30°$

Skets 3: Die dubbelhoek $P\hat{T}R$ is gelyk aan die som van α en α. eg. $45° = 22.5° + 22.5°$

Gegee enige spesiale hoeke α en β, dan kan ons die waardes van die sinus en cosinus verhoudings van die hoeke $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ en 2α bepaal.

Is jy duidelik oor hoe ‘n saamgestelde hoek verskil van ‘n dubbelhoek?

LW: $0°$; $30°$; $45°$; $60°$ en $90°$ is spesiale hoeke, ons kan die trig funksie van enige van hierdie hoeke sonder ‘n sakrekenaar bepaal.

Oefeninge: Dit moet gedoen word sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar.

A. Lei al die saamgestelde en dubbelhoekidentiteite af, wat op die vorige bladsy gegee is.

B. 1.1 Evalueer elk van die volgende sonder die gebruik van ‘n sakrekenaar.

a) $\sin 75°$ b) $\cos 15°$ c) $\cos 105°$ d) $\sin 165°$

e) $\sin 36°.\cos 54° + \cos 36° \sin 54°$ f) $\cos 42°.\cos 18° - \sin 42° \sin 18°$

g) $\sin 85°.\sin 25° + \cos 85° \cos 25°$ h) $\sin 70°.\cos 40° - \cos 70° \sin 40°$

i) $2 \sin 30°.\cos 30°$ j) $\dfrac{2 \sin 40°.\cos 40°}{\cos 10°}$

1.2 Indien $\sin \alpha = \dfrac{2}{3}$, $\tan \beta = \sqrt{2}$, en α en β is skerphoeke bepaal die waarde van $\sin(\alpha + \beta)$.

1.3 Indien $\tan A = \dfrac{2}{3}$ en $90° < A < 360°$, bepaal die waarde van $\cos 2A$, sonder ‘n sakrekenaar.

2. Vereenvoudig die volgende tot 'n enkel trigonometriese verhouding:

$$\frac{4\cos(-x).\cos(90° + x)}{\sin(30° - x).\cos x + \cos(30° - x).\sin x}$$

3. Bewys dat

a) $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}$

b) $\cos(90° - 2x).\tan(180° + x) + \sin^2(360° - x) = 3\sin^2 x$

c) $(\tan x - 1)(\sin 2x - 2\cos^2 x) = 2(1 - 2\sin x \cos x)$

4. Bepaal die algemene oplossing van x in die volgende:

a) $\sin 2x.\cos 10° - \cos 2x.\sin 10° = \cos 3x$

b) $\cos^2 x = 3\sin 2x$

c) $2\sin x = \sin(x + 30°)$

Skandeer die QR-kode vir hersiening van eksamenvraestelle in hierdie afdeling met oplossings.

ADDISIONELE VRAE

1. Gegee $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$; waar $90^0 \leq \alpha \leq 270°$
Bereken met behulp van 'n skets en sonder die gebruik van 'n sakrekenaar die waarde van: a) $\tan\alpha$ b) $\sin(90° + \alpha)$ c) $\cos 2\alpha$ (3+2+3)

2. a)
Gebruik die uitbreidings vir sin(A + B) en cos(A + B) om die volgende identiteit te bewys: (3)
$$\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$$

b) Indien $\tan(A+B) = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$, bewys in enige ΔABC dat (4)
$$\tan A.\tan B.\tan C = \tan A + \tan B + \tan C$$

3. Indien $\sin 36° \cos 12° = p$ en $\cos 36° \sin 12° = q$, bepaal in terme van p en q die waarde van :
a) $\sin 48°$ (3)
b) $\sin 24°$ (3)
c) $\cos 24°$ (3)

4. Toon dat $\sin^2 20° + \sin^2 40° + \sin^2 80° = \dfrac{3}{2}$
(**WENK:** $40° = 60° - 20°$ **en** $80° = 60° + 20°$ (7)

5. Gegee: $f(x) = 1 + \sin x$ en $g(x) = \cos 2x$
Bereken die snypunte van die grafieke van f en g vir $x \in [180°; 360°]$ (7)

6. As $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$, gegee is, bereken die numeriese waarde van $\sin 3\theta$, **SONDER** die gebruik van 'n sakrekenaar. (5)

7. Bewys dat vir enige hoek A:
$$\frac{4\sin A \cos A \cos 2A \sin 15°}{\sin 2A(\tan 225° - 2\sin^2 A)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$ (6)

8. Los op vir x as $2\cos x = \tan 2x$ en $x \in [-90° ; 90°]$. Toon ALLE bewerkings. (8)

9. Indien $\cos\beta = \dfrac{p}{\sqrt{5}}$; met $p < 0$ en $\beta \in [0^0; 90^0]$, bepaal, deur van 'n diagram gebruik te maak, 'n uitdrukking in terme van p vir:
a) $\tan\beta$ (4)
b) $\cos 2\beta$ (3)

10.1 As sin 28° = a en cos 32°= b , bepaal die volgende in terme van a en/of b
a) $\cos 28°$ b) $\cos 64°$ c) $\sin 4°$ (2+3+4)

10.2 Bewys, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, dat as sin 28° = a en cos 32° = b,
dan is $b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2} = \dfrac{1}{2}$. (4)

Hersiening: Graad 11 Meetkunde

Hieronder volg Graad 11 Stellings, Omgekeerde Stellings en Gevolgtrekkings wat jy moet ken. Die bewyse van die stellings gemerk met (**) moet jy studeer, want dit kan geassesseer word..

1	**Stelling****	Die loodlyn uit die middelpunt van ‘n sirkel na ‘n koord halveer die koord. **(loodlyn uit midpt. Θ na koord)**
	Omgekeerde	Die lynstuk wat die middelpunt van ‘n sirkel met die middelpunt van ‘n koord verbind, is loodreg op die koord. **(midpt Θ; Midpt. koord)**
		Die middelloodlyn van ‘n koord gaan deur die middelpunt van die sirkel. **(middelloodlyn van koord)**
2	**Stelling ****	Die hoek wat ‘n koord by die middelpunt van ‘n sirkel onderspan, is dubbel die hoek wat dit by enige punt op die omtrek onderspan. **(Midpts ∠ = 2 ×Omtreks∠)**
	Gevolgtrekkings	1. Die Omtrekshoek wat deur die middellyn onderspan word, is ‘n regte hoek, 90^0 . **(∠ in half sirkel of ∠ in ½ Θ)** 2. Hoeke in dieselfde sirkelsegment is gelyk **($\angle^e$ in dies. Θ segm)** 3. Gelyke koorde onderspan gelyke omtrekshoeke **(gelyke koorde; gelyke $\angle^e$)** 4. Gelyke koorde onderspan gelyke middelpuntshoeke **(gelyke koorde; gelyke $\angle^e$)** 5. Gelyke koorde in gelyke sirkels onderspan gelyke omtrekshoeke/middelpuntshoeke **(gelyke sirkels; gelyke koorde; gelyke $\angle^e$)**
	Gevolgtrekkings Omgekeerde	1. As ‘n koord van ‘n sirkel ‘n regte hoek by die omtrek onderspan, dan is die koord ‘n middellyn. **(koord onderspan 90°)** 2. As ‘n lynstuk wat twee punte verbind, gelyke hoeke by twee ander punte aan dieselfde kant van die lynstuk onderspan, dan is die vier punte konsiklies. (d.w.s. hulle lê op die omtrek van ‘n sirkel). **(lynstuk onderspan gelyke $\angle^e$)**
3	**Stelling ****	Die teenoorstande hoeke van ‘n koordevierhoek is supplementêr. **(teenoorst. $\angle^e$ van kvh)**
	Omgekeerde	As die teenoorstaande hoeke van ‘n vierhoek supplementêr is, dan is die vierhoek ‘n koordevierhoek. **(teenoorst. $\angle^e$ van vierhoek is suppl.)**
	Gevolgtrekking	Die buitehoek van ‘n koordevierhoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek. **(buite ∠ van kvh)**
	Gevolgtrekking Omgekeerde	As die buitehoek van ‘n vierhoek gelyk is aan die teenoorstaande binnehoek, dan is die vierhoek ‘n koordevierhoek. **(buite ∠van vierhoek =teenoorst binne∠)**
4	**Stelling**	‘n Raaklyn aan ‘n sirkel is loodreg op die radius by die raakpunt. **(raaklyn ⊥ radius)**
	Omgekeerde	‘n Lyn deur enige punt op ‘n sirkel loodreg op die radius, is ‘n raaklyn. **(lyn ⊥ radius)**
5	**Stelling**	As twee raaklyne vanuit ‘n punt aan ‘n sirkel getrek word, dan is die afstande van af die punt na die raakpunte gelyk. **(Raaklyne vanuit dies. punt)**
6	**Stelling ****	Die hoek wat gevorm word tussen’n raaklyn aan ‘n sirkel en ‘n koord wat vanuit die raakpunt getrek word, is gelyk aan die hoek in die oorstaande segment. **(∠tussen raaklyn en koord)**
	Omgekeerde	As ‘n lyn deur die eindpunt van ‘n koord, ‘n hoek met die koord vorm wat gelyk is aan die hoek in die oorstaande segment, dan is die lyn ‘n raaklyn aan die sirkel. **(∠ tussen lyn en koord = ∠in teenoorst. Θ segm)**

Skandeer die QR-kode vir graad 11 meetkundige hersiening met oplossings.

Sessie 3: Graad 12 Meetkunde

Hieronder is die **Graad 12 Stellings**, **Omgekeerde** Stellings en Gevolgtrekkings wat jy moet ken. Die bewyse van die stellings wat met (**) gemerk is, moet jy studeer want dit kan geassesseer word.

1	**Stelling****	Die lyn ewewydig aan een sy van 'n driehoek verdeel die ander twee sye in eweredige dele. **(lyn || een sy van Δ OF eweredigheidst. ; naam van || lyne)**
	Omgekeerde	As 'n lyn twee sye van 'n driehoek in eweredige dele verdeel, is die lyn ewewydig aan die derde sy. **(lyn verdeel twee sye van Δ ewer./ in verhouding)**
	Stelling **	As twee driehoeke gelykhoekig is, is hulle ooreenstemmende sye eweredig (en is driehoeke dus gelykvormig) **(||| Δ^e OF gelykhoekige Δe)**
	Omgekeerde	As die ooreenstemmende sye van twee driehoeke eweredig is, is die driehoeke gelykhoekig (en is driehoeke dus gelykvormig). **(Sye van Δ^e eweredig/ in verhouding)**

EWEREDIGHEID

'n **Verhouding (ratio)** beskryf die verhouding tussen twee hoeveelhede wat dieselfde eenhede het. Ons kan verhoudings gebruik om lengte, ouderdom, ens. te vergelyk. 'n Verhouding is 'n vergelyking tussen twee hoeveelhede van dieselfde soort en het geen eenhede nie.

Voorbeeld: As die lengte van die basis van 'n driehoek 200 cm is en die hoogte 40 cm is, dan kan ons die verhouding tussen die lengte van die basis en die hoogte van die driehoek uitdruk.

$lengte\ van\ die\ basis : hoogte$

$200 : 40$

$5 : 1$

'n Verhouding wat as 'n breuk geskryf word, gewoonlik in sy eenvoudigste vorm gegee.

$$\frac{lengte\ van\ die\ basis}{hoogte} = \frac{200}{40} = \frac{5}{1}$$

Voorbeeld: As $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

En $\frac{KL}{MN} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

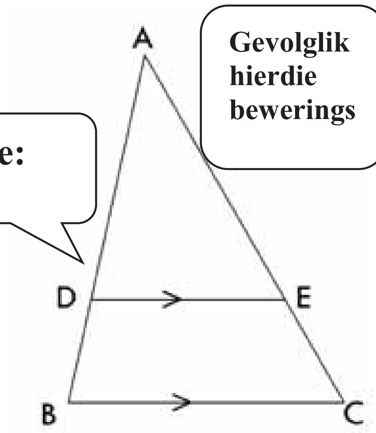
$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{KL}{MN}$

As twee of meer **verhoudings** gelyk is aan mekaar, dan sê ons dat die verhoudings **eweredig** is

Eweredigheidsstelling

Die lyn ewewydig aan een sy van 'n driehoek verdeel die ander twee sye in eweredige dele.
(lyn || een sy van Δ OF eweredigheidst. ; naam van || lyne)

Gegee:



Gevolglik hierdie bewerings

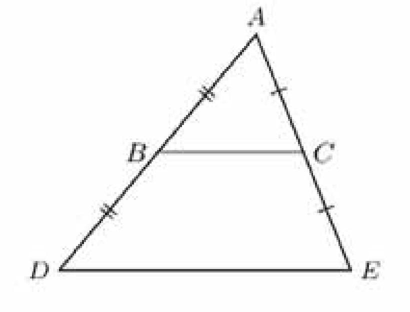
Die stelling word die rede

Bewering	Rede
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$	eweredigheidst. DE || BC
$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$	prop theorem DE || BC
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$	prop theorem DE || BC

Die eweredigheids stelling word so, kortliks geskryf.

SPESIALE GEVAL VAN DIE OMGEKEERDE EWEREDIGHEIDSTELLING: DIE MIDDELPUNTSTELLING

'n Gevolgtrekking van die omgekeerde eweredigheidstelling is die middelpuntstelling: die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig (parallel) aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy.

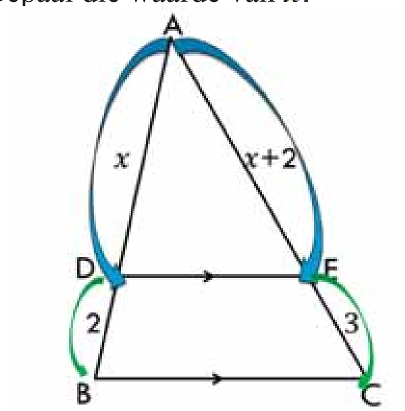


As AB = BD en AC = CE, dan is BC ǁ DE en BC = ½DE.

Dit is ook van selfsprekend dat: $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$

TOEPASSING VAN DIE EWEREDIGHEIDSTELLING: VOORBEELD 1

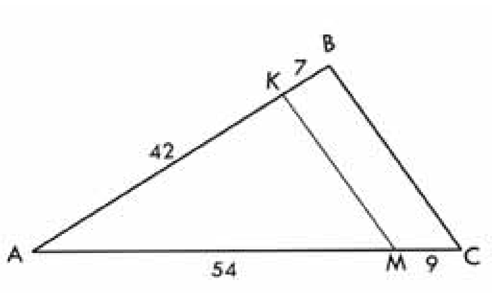
In die diagram hieronder is, ΔABC met D op AB en E op AC so dat DE || BC.
DB = 2 eenhede, EC = 3 eenhede, AD = x eenhede en AE = $x + 2$ eenhede.
Bepaal die waarde van x.



Bewering	Rede
$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$	eweredigheidstelling, DE || BC
$\frac{x}{2} = \frac{x+2}{3}$	

$$2(x + 2) = 3x$$
$$2x + 4 = 3x$$
$$4 = x$$

OMGEKEERDE EWEREDIGHEIDSTELLING:
VOORBEELD 2
In die diagram : KB = 7 eenhede; AK = 42 eenhede; AM = 54 eenhede en MC = 9 eenhede.
Bewys dat KM is parallel aan BC.



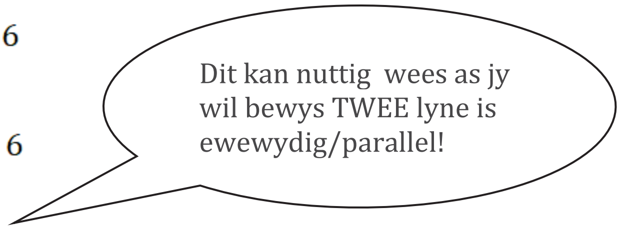
Ons moet bewys dat KM die sye van die Δ ABC eweredig verdeel (met ander woorde $\frac{AK}{KB} = \frac{AM}{MC}$)

Kom ons ondersoek:

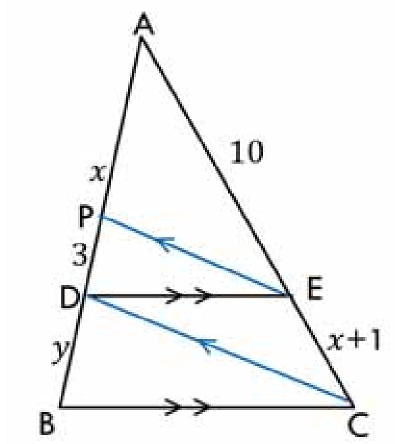
$$\frac{AK}{KB} = \frac{42}{7} = 6$$

$$\frac{AM}{MC} = \frac{54}{9} = 6$$

∴ KM || BC



VOORBEELD 3
In die diagram, is ΔABC met DE || BC, PE || DC, DB = y eenhede, DP = 3 eenhede, AP = x eenhede, AE = 10 eenhede en AE = $x + 1$ eenhede. Bepaal die waarde van x.



$$\frac{AP}{DP} = \frac{AE}{EC}$$ eweredigheidstelling, DC || *PE*

$$\frac{x}{3} = \frac{10}{x+1}$$

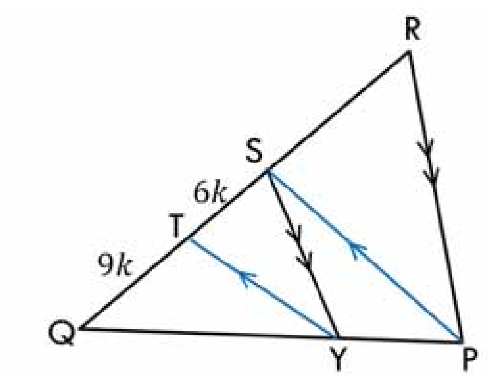
$$x(x+1) = 30$$

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$(x+6)(x-5) = 0$$

$$x \neq -6 \ or \ x = 5$$

VOORBEELD 4
In die diagram hieronder, ΔPQR met T en S op RQ en Y op QP so dat TY || SP en SY || PR
As $\frac{QT}{TS} = \frac{9}{6}$; bepaal die verhouding van $\frac{TS}{SR}$



Stelling	Rede
$\frac{QY}{YP} = \frac{QT}{TS}$	eweredigheidstelling, DE || *BC*
TY|| SP	
$\frac{QX}{XP} = \frac{9k}{6k} = \frac{3}{2}$	
$\frac{QY}{YP} = \frac{QS}{SR}$	eweredigheidstelling, DE || *BC*
SY|| PR	
$\frac{3}{2} = \frac{9k+6k}{SR}$	

$$3SR = 30k$$

$$SR = 10k$$

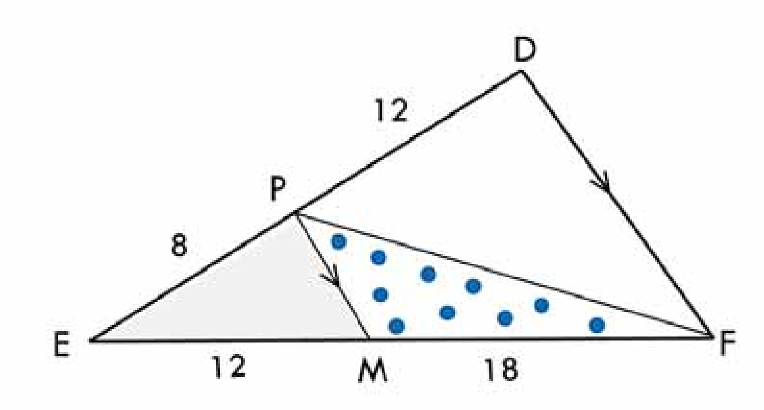
$$\frac{TS}{SR} = \frac{6k}{10k} = \frac{6}{10}$$

OPPERVLAKTE VAN DRIEHOEKE:

VOORBEELD 5

In die diagram is ΔEFD met PM // DF.

PD = 12 eenhede, EP = 8 eenhede, EM =12 eenhede en MF = 18 eenhede



5.1 Bepaal die verhouding van: $\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta PMF}$

5.2 Bepaal die verhouding van: $\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta DEF}$

- Daar is TWEE bekende formules vir die oppervlakte van 'n Δ.
- Ons moet besluit watter formule die beste werk in 'n gegewe vraag.

1) Oppervlakte van Δ= $\frac{1}{2}basis\ \times hoogte$ → gebruik wanneer twee Δ^e dieselde hoogte het

2) Oppervlakte van $\Delta = \frac{1}{2} \times ab \sin C$ → *gebruik wanneer twee* Δ^e 'n gemene hoek het.

5.1

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta PMF} = \frac{\frac{1}{2} \times EM \times h_p}{\frac{1}{2} \times MF \times h_p}$$

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta PMF} = \frac{EM}{MF}$$

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta PMF} = \frac{12}{18}$$

vereenvoudig

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta PMF} = \frac{2}{3}$$

5.2

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} \times EM \times PE \times \sin E}{\frac{1}{2} \times EF \times ED \times \sin E}$$

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta DEF} = \frac{EM \times PE}{EF \times ED}$$

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta DEF} = \frac{12 \times 8}{30 \times 20}$$

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta DEF} = \frac{96}{600}$$

$$\frac{oppervlakte\ \Delta PEM}{oppervlakte\ \Delta DEF} = \frac{4}{25}$$

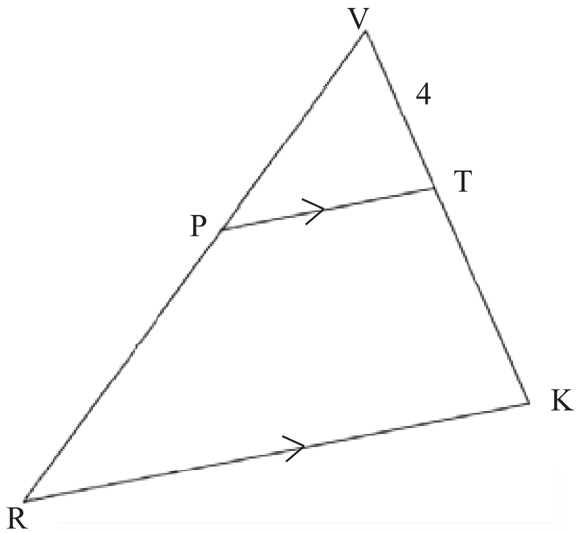
Skandeer die QR-kode vir graad 12 meetkundige hersiening.

OEFENING 1

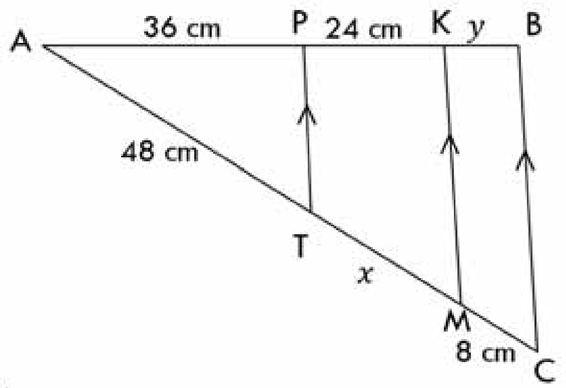
VRAAG 1

In die diagram hieronder, het ΔVRK vir P op VR en T op VK sodat $PT \parallel RK$.
VT = 4 eenhede, PR = 9 eenhede, TK = 6 eenhede and VP = $2x - 10$ eenhede.

Bereken die waarde van x.

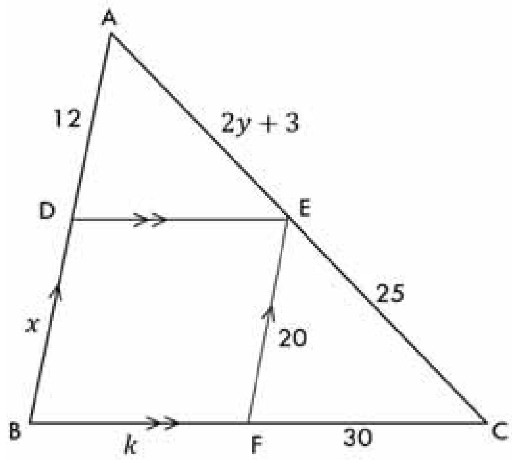


VRAAG 2



In die diagram hieronder, het ΔABC vir P en K op AB en T en M op AC sodat $PT \parallel KM \parallel BC$.
AP = 36cm, PK = 24cm, AT = 48cm; MC = 8cm, KB = y and TM = x
Bereken die waarde van x en y.

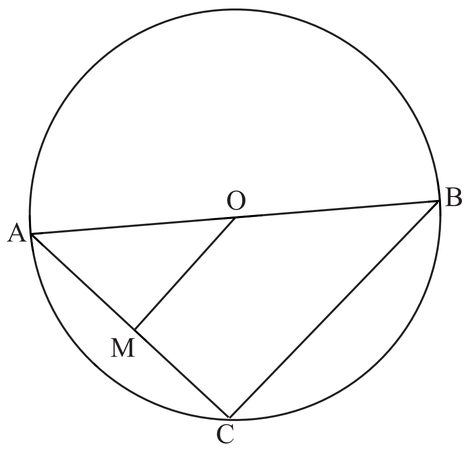
VRAAG 3



In die diagram hieronder, het ΔABC D op AB ; F op BC en E op AC sodat $DE \parallel BC$ en $EF \parallel AB$.
AD = 12 eenhede, EC = 25 eenhede
EF = 20 eenhede en FC = 30 eenhede.
$DB = x$; $BF = k$ en $AE = 2y + 3$ eenhede
Bereken die waarde van x, y en k.

VRAAG 4

O is die middelpunt van die sirkel. $OM \perp AC$. Die radius van die sirkel is 5 cm en BC = 8 cm.



4.1 Skryf neer die grootte van $B\hat{C}A$.

4.2 Bereken:

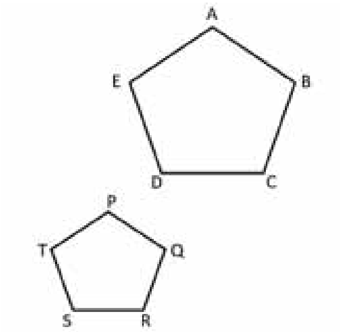
4.2.1 Die lengte van AM, met redes

4.2.2 Oppervlakte ΔAOM : Oppervlakte ΔABC

GELYKVORMIGHEID

Twee veelhoeke met dieselfde aantal sye is soortgelyk as:
1) Alle pare ooreenstemmende hoeke is gelyk **en**
2) Alle pare ooreenstemmende sye is in dieselfde verhouding.

Die simbool vir gelykvormigheid: |||

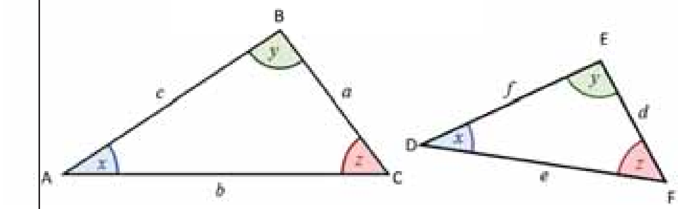


ABCDE is gelykvormig aan PQRST indien:

1) $\hat{A} = \hat{P}$; $\hat{B} = \hat{Q}$ $\hat{C} = \hat{R}$ $\hat{D} = \hat{S}$ $\hat{E} = \hat{T}$ **and**
2) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{EA}{TP}$

✓ Beide voorwaardes moet geld vir twee veelhoeke om gelykvormig te wees.

Stelling**

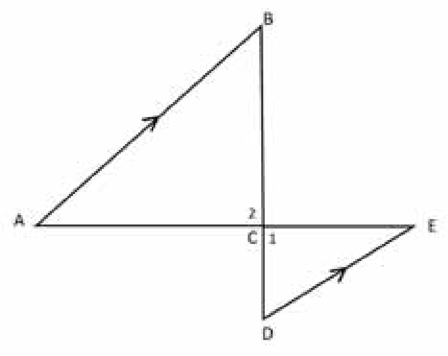
As twee driehoeke gelykhoekig is, is hulle ooreenstemmende sye eweredig (en is driehoeke dus gelykvormig) **(||| Δ^e OF gelykhoekige Δe)**	
Gegee: $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$; $\hat{C} = \hat{F}$ 	dan $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$
Omgekeerde	
As die ooreenstemmende sye van twee driehoeke eweredig is, is die driehoeke gelykhoekig (en is driehoeke dus gelykvormig). **(Sye van Δ^e eweredig/ in verhouding)**	
Gegee: **ΔABC** en **ΔDEF met** $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$	Dan $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$; $\hat{C} = \hat{F}$
Nota:	

Wees versigtig om gelykvormige driehoeke korrek te benoem.
Die hoeke wat gelyk is, moet in dieselfde posisie wees:

ΔABC ||| ΔDEF (∠, ∠, ∠) ⟶ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

VOORBEELD 1

In the diagram is $AB \parallel DE$. Bewys dat $\Delta ABC \,|||\, \Delta EDC$



In ΔABC en ΔDEC:

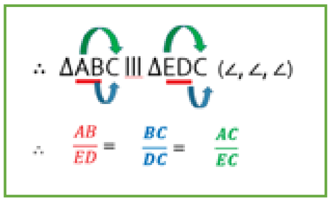
1) $\hat{A} = \hat{E}$ (verwis $\angle s$; $AB \parallel DE$)

2) $\hat{B} = \hat{D}$ (verwis $\angle s$; $AB \parallel DE$)

$\therefore \Delta ABC \;|||\; \Delta EDC$ $(\angle, \angle, \angle)$

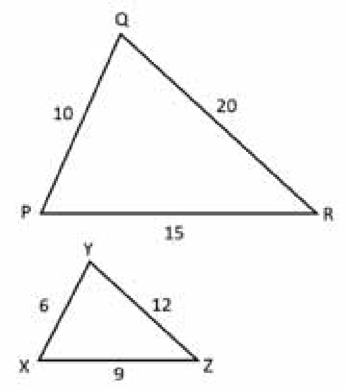
• Aangesien die figure gelykvormig is, kan ons inligting oor hul ooreenstemmende sye aflei wat nie voorheen bekend was nie.

$$\therefore \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$$



VOORBEELD 2

In the diagram is $PR = 15$; $QR = 20$; $XZ = 9$; $YZ = 12$ en $XY = 6$ eenhede.
Bewys dat $\Delta XYZ \,|||\, \Delta PQR$ en dat $\hat{Q} = \hat{Y}$.



In ΔPQR en ΔXYZ :

1) $\frac{QP}{YX} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

2) $\frac{QR}{YZ} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

3) $\frac{PR}{XZ} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

$$\therefore \frac{QP}{YX} = \frac{QR}{YZ} = \frac{PR}{XZ}$$

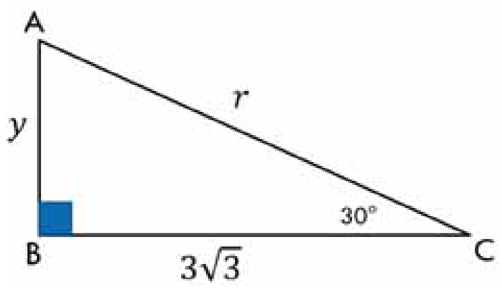
$\therefore \Delta XYZ \;|||\; \Delta PQR$ **(Sye van Δ^e eweredig/ in verhouding**

Aangesien die figure gelykvormig is, kan ons inligting oor hul ooreenstemmende hoeke aflei wat nie voorheen bekend was nie

$\therefore \hat{X} = \hat{P}$ and $\hat{\boldsymbol{Y}} = \hat{\boldsymbol{Q}}$ and $\hat{Z} = \hat{R}$

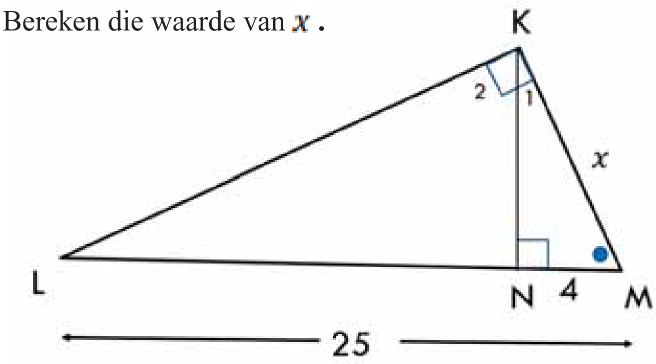
VOORBEELD 3 :

Gegee die skets hieronder bepaal die waardes van y en r sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.



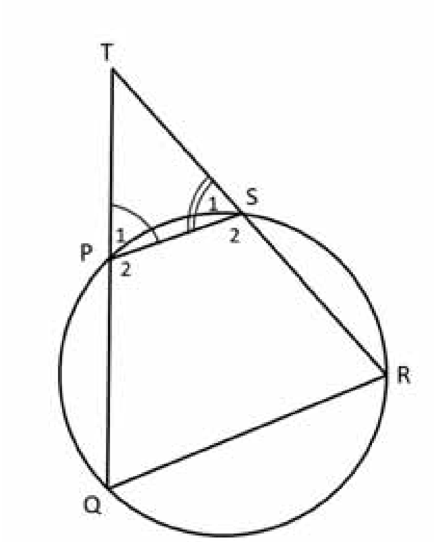
VOORBEELD 4:

In diee diagram is LK $\perp$ KM en KN $\perp$ LM
Bereken die waarde van x .



VRAAG 1

In die diagram hieronder is P, S, R en Q punte op die omtrek van die sirkel.
QP verleng ontmoet RS verleng by T.



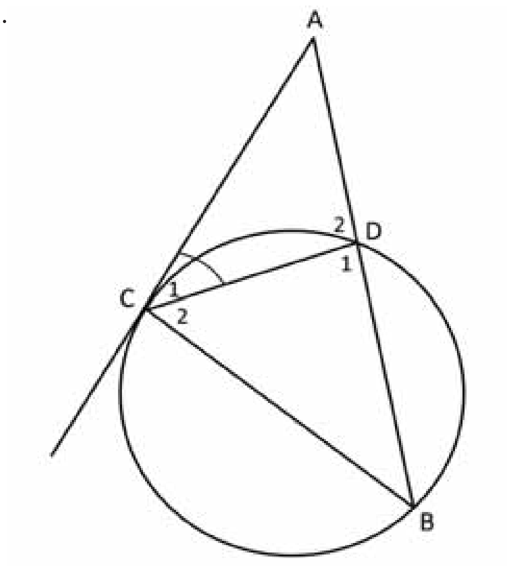
1.1 Bewys dat $\Delta TPS \|| \Delta TRQ$

1.2 Toon aan dat TP. TQ = TS. TR

1.3 Bewys gevolglik, of andersins, dat: $PQ = \frac{TR.TS - TP^2}{TP}$

VRAAG 2

In the diagram hieronder, is CA ‘n raaklyn aan die sirkel.



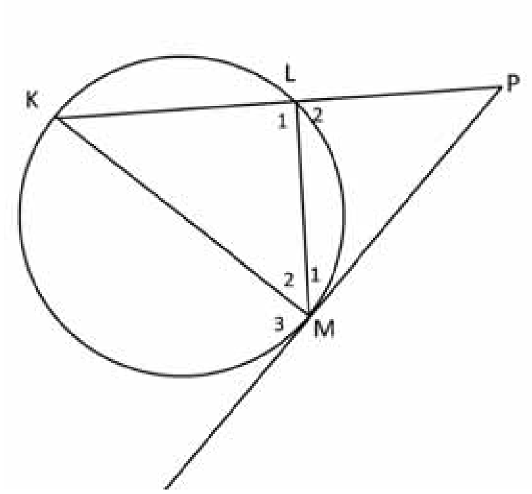
Bewys, met redes, dat

2.1 $\Delta ACD \|| \Delta ABC$

2.2 CD.AC=BC.AD

VRAAG 3

In die diagram hieronder, is SP ‘n raaklyn aan die sirkel. KM is die middellyn van die sirkel.



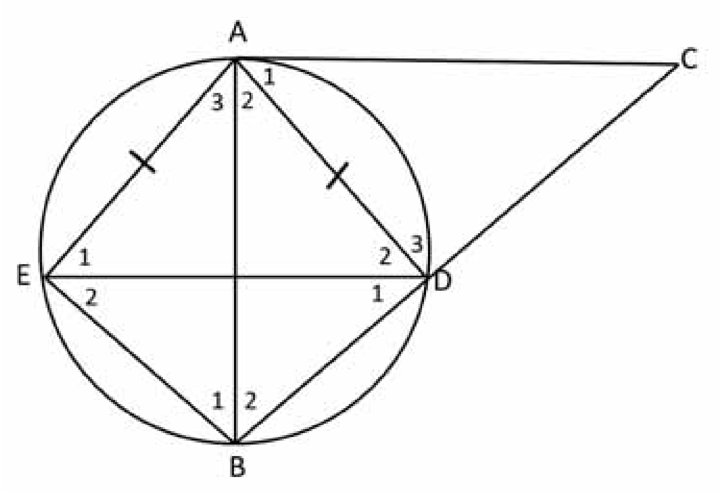
Bewys, met redes, dat

3.1 $\Delta KLM \|| \Delta MLP$

3.2 $ML^2 = KL.\ LP$

VRAAG 4

In die diagram hieronder, is CA ‘n raaklyn aan die sirkel met EA =AD.



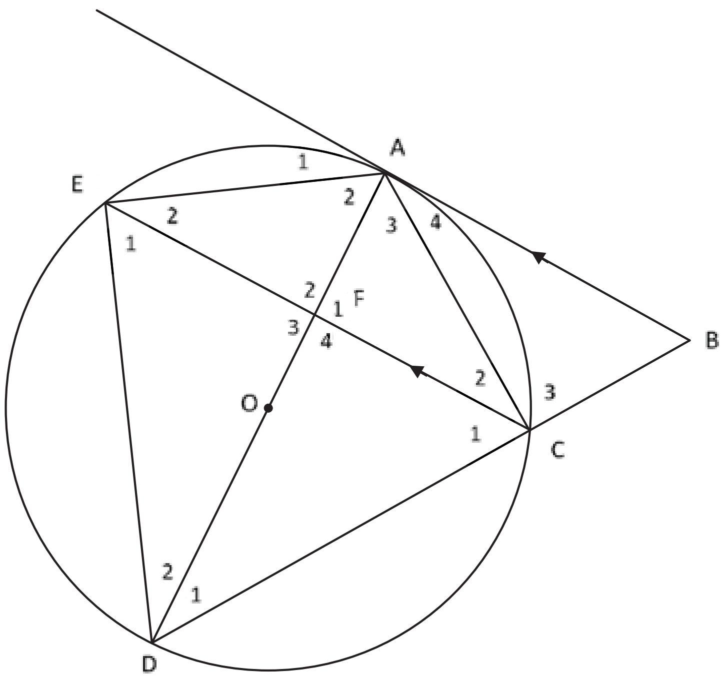
Bewys, met redes, dat:

4.1 $\Delta ADC \,|||\, \Delta BEA$

4.2 $AD^2 = BE.DC$

VRAAG 5

In die figuur hieronder, is AB ‘n raaklyn aan die sirkel met middelpunt O. AC = AO en BA || CE. DC verleng, sny raaklyn BA by die punt B.



Bewys, met redes, dat:

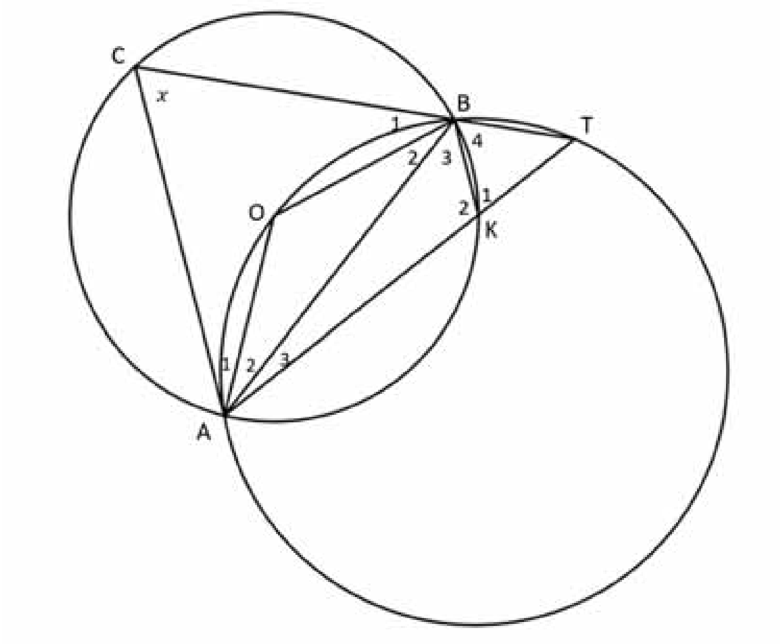
5.1 $\hat{C}_2 = \hat{D}_1$

5.2 $\Delta ACF \,|||\, \Delta ADC$

5.3 $AD = 4AF$

VRAAG 6

In die figuur hieronder, is O die middelpunt van die sirkel CAKB. AK verleng sny die sirkel AOBT by T. $A\hat{C}B = x$



6.1 Bewys, met redes, dat:

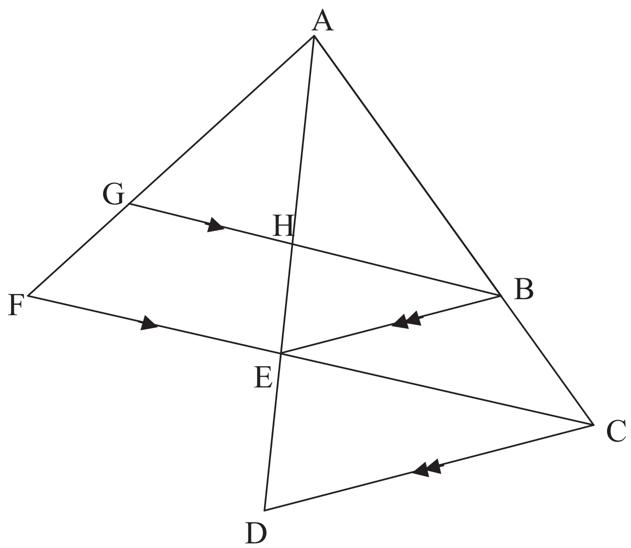
6.1.1 $\hat{T} = 180° - 2x$

6.1.2 AC || KB.

6.1.3 ΔBKT ||| ΔCAT

6.2 As AK : KT = 5 : 2, bepaal die waarde van $\frac{AC}{KB}$

7. In die diagram hieronder is GB || FC en BE || CD. AC = 6 cm en $\frac{AB}{BC} = 2$.



7.1 Bereken met redes:

a) AH : ED

b) $\frac{BE}{CD}$

7.2 Indien HE = 2 cm, bereken die waarde van AD × HE.

Sessie 4: Graad 12 Differensiaalrekene

Derdegraadse Grafieke: In hierdie les sal jy deur 3 verskillende tipes vrae werk.

1. **Om derdegraadse grafieke te trek**
2. **Die beantwording van afgeleide vrae as die grafiek gegee is.**
3. **Die beantwording van afgeleide vrae as die grafiek van die afgeleide gegee is**

1.1 Gegewe: $f(x)=2x^3-x^2-4x+3$

1.1.1 Toon dat ($x-1$) 'n faktor is van $f(x)$. (2)

1.1.2 Faktoriseer vervolgens $f(x)$ volledig. (2)

1.1.3 Bepaal die koördinate van die draaipunte van f. (4)

1.1.4 Teken 'n sketsgrafiek van f en toon die draaipunte sowel as die x-afsnitte duidelik aan. (4)

1.1.5 Vir watter waardes van x sal f 'n infleksiepunt(buigpunt) hê? (4)

[16]

1.2 Gegewe $f(x)=x^3+x^2-5x+3$

1.2.1 Skets die grafiek van $f(x)$. (7)

1.2.2 Vir watter waardes van x is $f(x)$ stygend? (2)

1.2.3 Beskryf een transformasie van $f(x)$ wat indien toegepas, veroorsaak dat $f(x)$ twee positiewe ongelyke wortels sal hê (2)

1.2.4 Gee die vergelyking van g indien g die refleksie van f in die y-as is. (3)

1.2.5 Bepaal die gemiddelde veranderingstempo van f tussen die punte (0 ; 3) en (1 ; 0). (2)

1.2.6 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan f waar x = -2. (4)

1.2.12 Bewys dat die raaklyn in 1.2.6 die kromme van f in twee plekke sal sny. (4)

1.3 'n Derdegraadse funksie f het die volgende eienskappe:

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(3)=f(-1)=0$
- $f'(2)=f'\left(-\frac{1}{3}\right)=0$

f neem af vir $x\in\left[-\frac{1}{3}\,;\,2\right]$ alleenlik

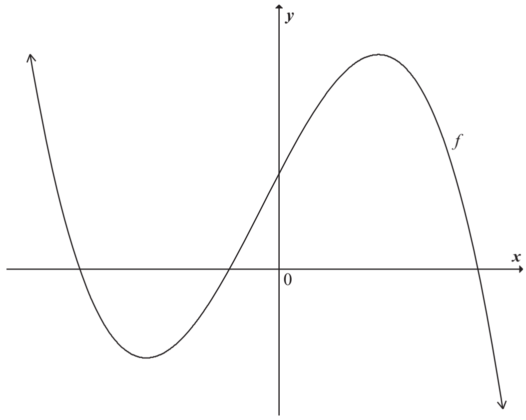
Teken 'n moontlike sketsgrafiek van f, en toon die volgende duidelik aan : die grafiek: die x-koördinate van die draaipunte en al die x-afsnitte. (4)

1.4 If f is a cubic function with:

- $f(3)=f'(3)$,
- $f(0)=27$,
- $f''(x)>0$ when $x<3$ and $f''(x)<0$ when $x>3$ (3)

draw a sketch graph of f indicating ALL relevant points.

2.1 Die grafiek van die funksie $f(x) = -x^3 - x^2 + 16x + 16$ is hieronder geskets.

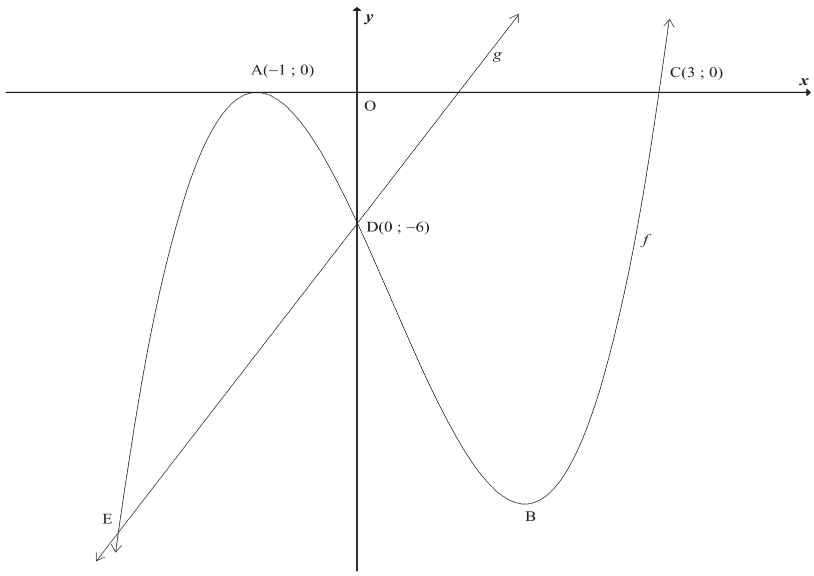


2.1.1 Bereken die x-koördinate van die draaipunte van f. (4)

2.1.2 Bereken die x-koördinaat van die punt waar $f'(x)$ 'n maksimum sal wees. (3)

2.1.3 Toon aan dat die konkawiteit van f by $x = -\frac{1}{3}$ verander. (3)

2.2 Die grafieke van $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en $g(x) = 6x - 6$ is hieronder geskets.
A(– 1 ; 0) en C(3 ; 0) is die x-afsnitte van f. Die grafiek van f het draaipunte by A en B. D(0 ; – 6) is die y-afsnit van f. E en D is snypunte van die grafieke van f en g.



2.2.1 Toon aan dat $a = 2$; $b = -2$; $c = -10$ en $d = -6$. (5)

2.2.2 Bereken die koördinate van die draaipunt B. (5)

2.2.3 $h(x)$ is die vertikale afstand tussen $f(x)$ en $g(x)$, met ander woorde $h(x) = f(x) - g(x)$. (5)
Bereken x sodat $h(x)$ 'n maksimum is, waar $x < 0$. [15]

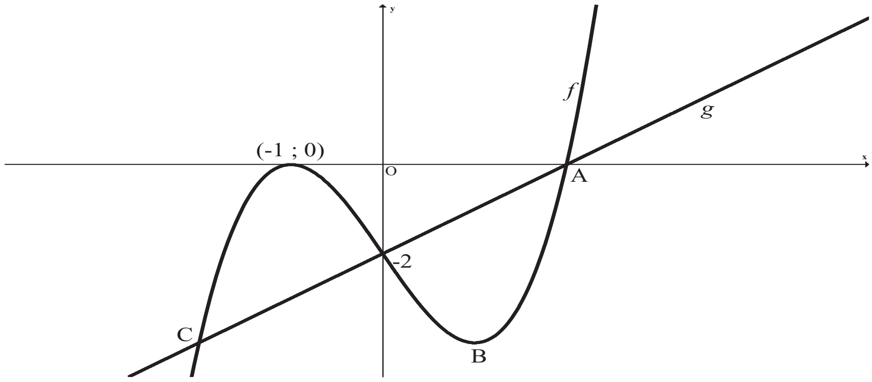
2.3 Beskou die grafiek van $g(x) = -2x^2 - 9x + 5$.

2.5.1 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van g by $x = -1$. (4)

2.5.2 Vir watter waardes van q sal die lyn $y = -5x + q$ nie die parabool sny nie? (3)

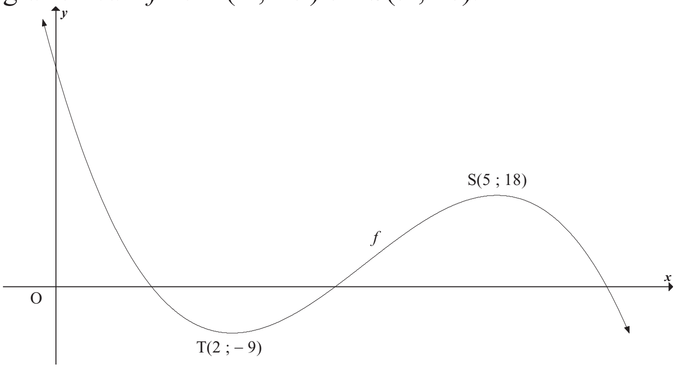
2.4 Gegee: $h(x) = 4x^3 + 5x$
Verduidelik of dit moontlik is om 'n raaklyn met 'n negatiewe gradiënt aan die grafiek van h te teken. Toon AL jou berekeninge. (3)

2.5 Die grafiek hieronder verteenwoordig die funksies *f* en *g* met $f(x)=ax^3-cx-2$ en $g(x)=x-2$. A en (-1 ; 0) is die *x*-afsnitte van *f*. Die grafiek van *f* en *g* sny by A en C.



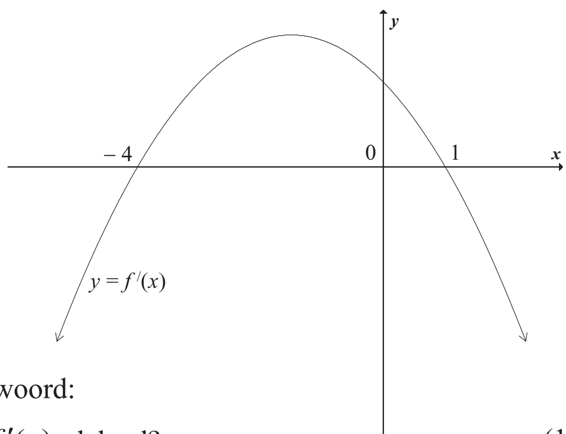
2.5.1 Toon deur berekeninge aan dat $a = 1$ en $c = -1$. (4)
2.5.2 Bepaal die koördinate van B, die draaipunt van f. (3)
2.5.3 Toon aan dat die lyn BC ewewydig aan die *x*-as is. (7)
2.5.4 Bepaal die *x*-koördinate van die infleksiepunt van *f*. (2)
2.5.5 Skryf die waardes van *k* neer waarvoor $f(x)=k$ slegs EEN wortel sal hê. (3)
2.5.6 Skryf die waardes van *x* neer waarvoor $f'(x)<0$. (2)

2.6 Die funksie $f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ is hieronder geskets. Die draaipunte van die grafiek van f is T(2 ; – 9) en S(5 ; 18).



2.6.1 Toon aan dat $a = 21$, $b = -60$ en $c = 43$. (7)
2.6.2 Bepaal 'n vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van f by $x = 1$. (5)
2.6.3 Bepaal die *x*-waarde waarby die grafiek van f 'n buigpunt het. (2)

3.1 Die grafiek van $y=f'(x)$, waar f 'n derdegraadse funksie is, is hieronder geskets.



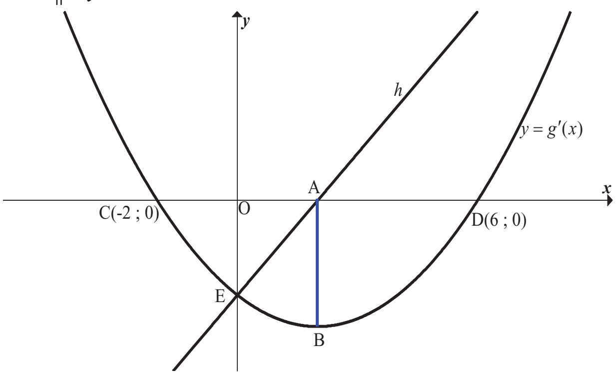
Gebruik die grafiek om die volgende vrae te beantwoord:

a) Vir watter waardes van x is die grafiek van $y=f'(x)$ dalend? (1)
b) By watter waarde van x sal die grafiek van f 'n lokale minimum hê? Gee redes vir jou antwoord. (3)

3.2

Die grafieke van $y = g'(x) = ax^2 + bx + c$ en $h(x) = 2x - 4$ is hieronder geskets. Die grafiek van $y = g'(x) = ax^2 + bx + c$ is die grafiek van die afgeleide van ‘n derdegraadse funksie g. Die grafieke van h en g' het ‘n gemeenskaplike y-afsnit by E. C(-2 ; 0) en D(6 ; 0) is die x-afsnitte van die grafiek van g'. A is die x-afsnit van h en B is die draaipunt van g'.

AB $\parallel$ y-as.



3.2.1 Skryf die koördinate van E neer. (1)

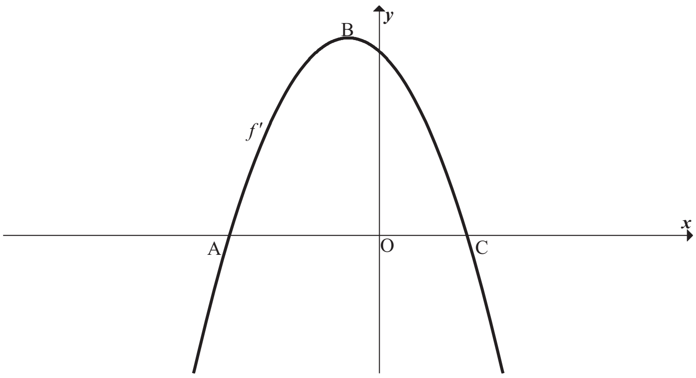
3.2.2 Bepaal die vergelyking van die grafiek van g' in die vorm $y = ax^2 + bx + c$. (4)

3.2.3 Skryf die x-koördinate van die draaipunt van g neer. (2)

3.2.4 Skryf die x-koördinate van die infleksiepunt van die grafiek van g neer. (2)

3.2.5 Verduidelik hoekom g ‘n lokale maximum by $x = -2$ het. (3)

3.3 Hieronder is die grafiek van f', die afgeleide van $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$ geteken. A, B en C is die afsnitte van f' met die asse.



3.3.1 Bereken die koördinate van A. (2)

3.2.2 Bepaal die koördinate van B en C. (3)

3.3.3 Watter punte op die grafiek van $f(x)$ sal presies dieselfde x-waardes as B en C hê? (1)

3.3.4 Vir watter waardes van x sal $f(x)$ toeneem? (2)

3.3.5 Bepaal die y-koördinaat van die punt van infleksie van f. (4)