CAPS

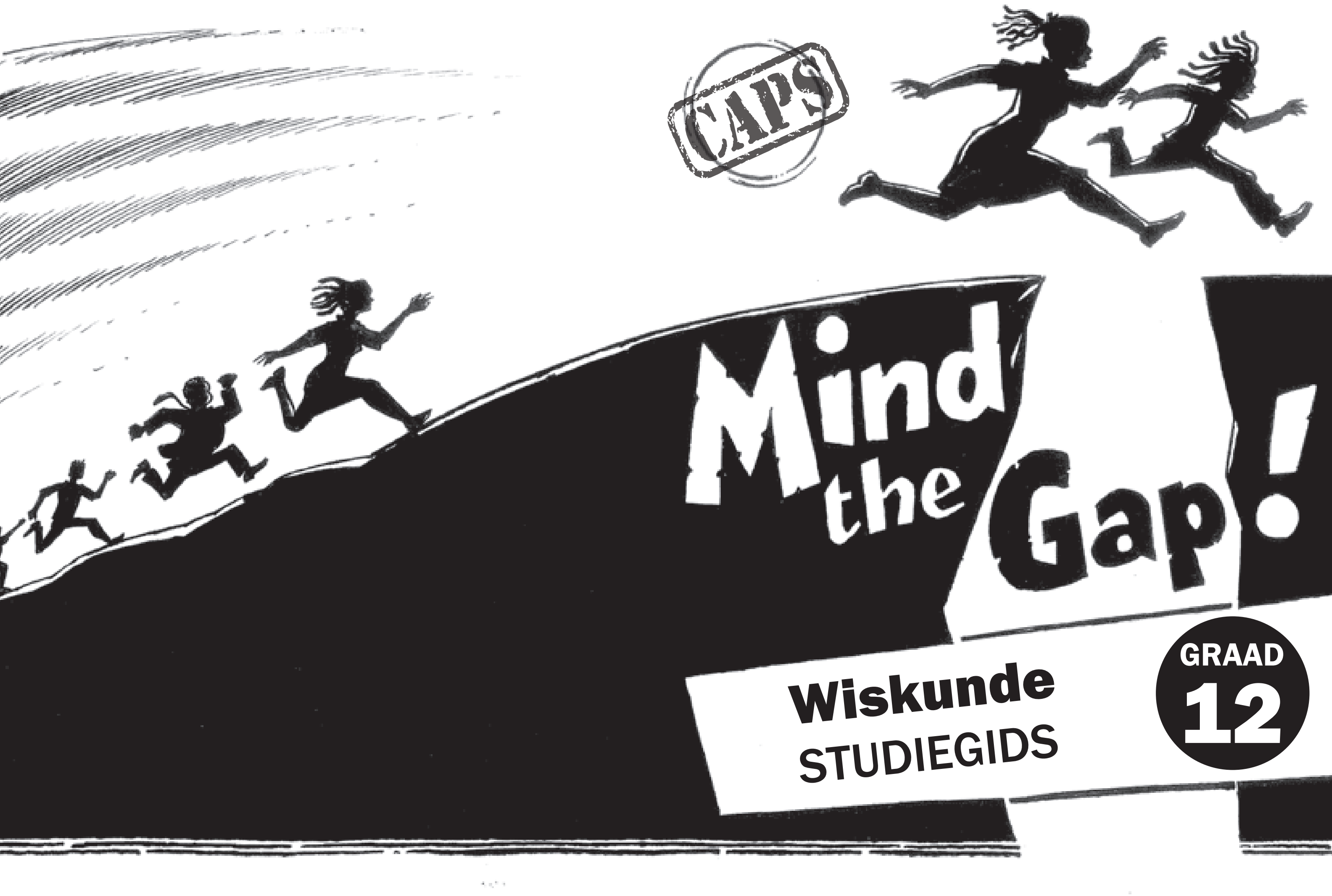
Mind the Gap!

Wiskunde Studiegids

Graad 12

basic education

Departement:
Basiese Onderwys
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA



basiese onderwys

Departement:
Basiese Onderwys
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

Hierdie inhoud mag nie vir kommersiële doeleindes verkoop of gebruik word nie.
Kurrikulum en Assesseringsbeleidsverklaring (KABV) Graad 12
***Mind the Gap*-studiegids vir Wiskunde**

ISBN 978-1-4315-1933-0

Strubenstraat 222, Pretoria, Suid-Afrika
Kontakpersoon: Dr Patricia Watson
Epos: watson.p@dbe.gov.za
Tel 012 357 4502
http://www.education.gov.za
Inbelsentrum: 0800202933

Die eerste uitgawe, wat in 2012 gepubliseer is, vir die Hersiene Nasionale Kurrikulumverklaring (HNKV) Graad 12 *Mind the Gap*-studiegidse vir Rekeningkunde, Ekonomie, Geografie en Lewenswetenskappe; en die tweede uitgawe, wat in 2014 uitgegee is, is in ooreenstemming gebring met die Kurrikulum en Assesseringsbeleidsverklaring (KABV) en in 2015 is meer titels by die reeks gevoeg, onder andere die KABV Graad 12 *Mind the Gap*-studiegids vir Wiskunde.

ISBN 78-1-4315-1935-4

Mind the Gap-produksiespan
Besturende redakteur vir die reeks: Dr. Patricia Watson
Produksie-koördineerders: Lisa Treffry-Goatly en Radha Pillay
Produksie-assistente: Nomathamsanqa Hlatshwayo en Motshabi Mondlane
Skrywers: Lynn Bowie, Ronald Peter Jacobs, Sue Jobson, Terrence Mongameli Mbusi, Sello Gert Motsoane, Nonhlanhla Rachel Mthembu, Ntshengedzeni Steven Muthige, Mpho Francis Phatlane, Josephina Mamaroke Phatlane, Peter Ketshepile Raadt, Percy Stephen Tebeila, Anita van Heerden en Carol Wyeth.
Vakkundige lesers: Prof Bruce Watson, Leonard Mudau en Karen van Niekerk
Proeflesers: John Ostrowick en Angela Thomas
Ontwerpers: Sonja McGonigle en Erika van Rooyen
Illustreerders: Michele Dean, Vusi Malindi, Khosi Pholosa, John Ostrowick, Kenneth Tekane
Omslagillustrasie: Alastair Findlay
Afrikaansvertaler: Marga Vos
IT-ondersteuning tydens skrywerswerkswinkel op die perseel: Wayne Cussons
Spesiale dank aan Winning Teams, CEO Denzil Hollis, vir die organisasie se vakkundigheid en ondersteuning met die werkswinkel
Winning Team-bordspeletjies fasiliteerders: Mantse Khoza en Sue Jobson

Ministeriële voorwoord

Matsie Angelina Motshekga, LP
Minister van Basiese Onderwys

Die Departement van Basiese Onderwys is verheug om die tweede uitgawe van die reeks *Mind the Gap*-studiegidse vir Graad 12-leerders bekend te stel. Hierdie studiegidse gaan voort met die vernuwende en toegewyde poging deur die DBO om die akademiese prestasie van Graad 12-kandidate in die Nasionale Senior Sertifikaat (NSS)-eksamen te verbeter.

Die studiegidse is geskryf deur 'n span vakkundiges wat bestaan uit onderwysers, eksaminators, moderators, vakadviseurs en vakkoördineerders. Navorsing wat in 2012 begin het, het getoon dat die *Mind the Gap*-reeks sonder twyfel 'n positiewe impak op punte gehad het. Dit is ons vurige wens dat die *Mind the Gap*-studiegidsreeks ons almal nader sal bring aan 'n punt waar geen leerder agterbly nie veral aangesien ons 20 jaar van demokrasie vier.

Die tweede uitgawe van *Mind the Gap* is in ooreenstemming gebring met die 2014 Kurrikulum en Assesseringsbeleidsverklaring (KABV). Dit beteken dat die skrywers die Nasionale Beleid wat betrekking het op die program, bevorderingsvereistes en protokol vir assessering van die Nasionale Kurrikulumverklaring vir Graad 12 in 2014 in aanmerking geneem het.

Die KABV-gerigte *Mind the Gap*-studiegidse spruit deels voort uit die 2013 Nasionale Diagnostiese verslag oor leerderprestasie en is ook gebaseer op die Graad 12 Eksamenriglyne. Elkeen van die *Mind the Gap*-studiegidse verskaf sleutelterminologie en bied eenvoudige verduidelikings en voorbeelde van tipiese vrae wat leerders in die eksamen kan verwag. Merkmemorandums is ook ingesluit om leerders te help om beter te verstaan. Leerders word ook verwys na spesifieke vrae in vorige nasionale eksamenvraestelle en eksamenmemorandums wat op die Departement se webwerf, www.education.gov.za, beskikbaar is.

Die KABV-uitgawes sluit Rekeningkunde, Ekonomie, Geografie, Lewenswetenskappe, Wiskunde, Wiskundige Geletterdheid en Fisiese Wetenskappe Deel 1: Fisika en Deel 2: Chemie in. Die reeks is in Engels en Afrikaans beskikbaar. Daar is ook nege Engels Eerste Addisionele Taal (EAT) studiegidse beskikbaar. Dit is EAT Vraestel 1 (Taal in konteks), EAT Vraestel 3 (Skyfwerk) en 'n gids vir elkeen van die voorgeskrewe literatuurwerke wat in Vraestel 2 ingesluit is. Dit is Short Stories, Poetry, *To Kill a Mockingbird*, *A Grain of Wheat*, *Lord of the Flies*, *Nothing but the Truth* en *Romeo and Juliet*. (Onthou asseblief wanneer jy vir EAT Vraestel 2 voorberei, dat jy net die voorgeskrewe werke leer wat jy in jou EAT-klas by die skool gedoen het.)

Die studiegidse is ontwerp om leerders by te staan wat onderpresteer het as gevolg van te min blootstelling aan die vereiste inhoud van die kurrikulum. Die doel van hierdie reeks gidse is om die gaping tussen slaag en druip te oorkom en om leemtes in die leerders se kennis van algemene konsepte te oorbrug, sodat leerders kan slaag.

Al wat oorbly, is dat ons Graad 12-leerders nou die nodige ure spandeer om toegewyd voor te berei vir die eksamens. Leerders, maak ons trots – studeer hard. Ons wens julle alle sterkte toe vir julle Graad 12-eksamen.

Matsie Angelina Motshekga, LP
Minister van Basiese Onderwys
2015

Inhoudsopgawe

Beste Graad 12-leerder ... ix

Hoe om hierdie Studiegids te gebruik xi

Top 10-studiewenke xii

Geheuerympies xiii

Breinkaarte xiv

Op die dag van die eksamen xv

Vraagwoorde wat jou kan help om vrae te beantwoord xvi

Woordeskat xvii

Algemene terme xvii

Tegniese terme xix

Die wiskunde wat jy nodig het xxviii

Eenheid 1: Eksponente en wortelvorms. 1

1.1 Die getallestelsel 1
1.2 Werk met irrasionale getalle 3
1.3 Eksponente 6
1.4 Eksponensiaalvergelykings 12
1.5 Vergelykings met rasionale eksponente 14
1.6 Eksamentipe voorbeelde 17

Eenheid 2: Algebra 19

2.1 Algebraïese uitdrukkings 19
2.2 Optelling en aftrekking 19
2.3 Vermenigvuldiging en deling 20
2.4 Faktorisering 21
2.5 Notas oor die faktorisering van 'n trinoom 22
2.6 Kwadratiese vergelykings 24
2.7 Kwadratiese ongelykhede 30
2.8 Gelyktydige vergelykings 34
2.9 Die aard van die wortels 37

Eenheid 3: Getalpatrone, rye en reekse 42

3.1 Getalpatrone 42
3.2 Rekenkundige rye 43
3.3 Kwadratiese rye 45
3.4 Meetkundige rye 48
3.5 Rekenkundige en meetkundige reekse 50

Eenheid 4: Funksies **60**
4.1 Wat is 'n funksie? 60
4.2 Funksienotasie........ 62
4.3 Die basiese funksies, formules en grafieke........ 63
4.4 Inverse funksies........ 81
4.5 Die logaritmiese funksie 84

Eenheid 5: Trig funksies **88**
5.1 Grafieke van trigonometriese funksies 88
5.2 Die effek van a op die vorm van die grafiek: verandering in amplitude 91
5.3 Die effek van q op die vorm van die grafiek: vertikale skuif ... 93
5.4 Die effek van b op die vorm van die grafiek: verandering in periode 94
5.5 Die effek van p op die vorm van die grafiek: horisontale skuif 95

Eenheid 6: Finansiële groei en verval........ **101**
6.1 Hersiening: Enkelvoudige en saamgestelde rente........ 101
6.2 Bereken die waarde van P, i en n........ 104
6.3 Enkelvoudige en saamgestelde vervalformules........ 107
6.4 Nominale en effektiewe rentekoerse 109
6.5 Beleggings met veranderinge in tyd en rentekoers........ 111
6.6 Annuïteite 113

Eenheid 7: Differensiaalrekene........ **123**
7.1 Gemiddelde gradiënt........ 123
7.2 Gemiddelde tempo van verandering........ 125
7.3 Die afgeleide van 'n funksie by 'n punt........ 126
7.4 Gebruike van die afgeleide 131
7.5 Teken die grafiek van 'n derdegraadspolinoom 132

Eenheid 8: Waarskynlikheid **145**
8.1 Hersiening........ 145
8.2 Teoretiese waarskynlikheid en relatiewe frekwensie........ 146
8.3 Venndiagramme 147
8.4 Onderling uitsluitende gebeurtenisse........ 149
8.5 Komplementêre gebeurtenisse........ 150
8.6 Gebeurtenisse wat nie onderling uitsluitend is nie........ 152
8.7 Opsomming van simbole en versamelings wat in waarskynlikheid gebruik word 154
8.8 Boomdiagramme en gebeurlikheidstabelle 158
8.9 Gebeurlikheidstabelle 161
8.10 Telbeginsels 164
8.11 Gebruik telbeginsels in waarskynlikheid........ 170

Eenheid 9: Analitiese meetkunde..172
9.1 Hersiening: Analitiese meetkunde 172
9.2 Die vergelyking van ’n lyn... 177
9.3 Die inklinasie van ’n lyn 179
9.4 Sirkels in analitiese meetkunde 184

Eenheid 10: Trigonometrie..191
10.1 Hersiening: Trig verhoudings 191
10.2 Trig verhoudings in al die kwadrante van die Cartesiese vlak 194
10.3 Los driehoeke op met trig 196
10.4 Gebruik ’n sakrekenaar om trig verhoudings te bepaal 197
10.5 Die trig verhoudings van spesiale hoeke 198
10.6 Gebruik reduksieformules 201
10.7 Trigonometriese identiteite 205
10.8 Meer trig identiteite 207
10.9 Los trigonometriese vergelykings op.....................................209
10.10 Nog oplossing van trig vergelykings met identiteite..............213
10.11 Saamgestelde en dubbelhoek identiteite 215
10.12 Bepaal x waarvoor die identiteit ongedefinieerd is..............220

Eenheid 11: Trigonometrie: Sinus, kosinus en oppervlaktereëls...222
11.1 Reghoekige driehoeke...222
11.2 Oppervlaktereël 224
11.3 Sinusreël 226
11.4 Kosinusreël 228
11.5 Probleme in twee en drie dimensies.....................................230

Eenheid 12: Euklidiese Meetkunde......................................235
12.1 Hersiening: Eweredigheid en oppervlakte van driehoeke 235
12.2 Eweredigheidstellings... 237
12.3 Gelykvormige veelhoeke 240

Eenheid 13: Statistiek 248
13.1 Staafgrafieke en frekwensietabelle....................................... 249
13.2 Mate van sentrale neiging 250
13.3 Mate van verspreiding (of uitbreiding) 254
13.4 Vyfgetalopsomming en mond-en-snordiagramme 256
13.5 Histogramme en frekwensieveelhoeke 260
13.6 Kumulatiewe frekwensietabelle en grafieke (ogiewe)...........263
13.7 Variansie en standaardafwyking 267
13.8 Tweeveranderlike data en strooiingsdiagramme (strooiingsgrafieke) 271
13.9 Die lineêre regressielyn (of die kleinste-kwadrate-regressielyn).. 274

Beste Graad 12-leerder

Hierdie *Mind the Gap*-studiegids is ontwerp om jou met jou voorbereiding vir die KABV Graad 12-eindeksamen te help.

Hierdie studiegids dek NIE die totale kurrikulum nie, maar fokus op die kernkonsepte van elk van die kennisareas en wys jou in watter areas jy maklik punte kan verdien.

Jy moet deur die studiegids werk om jou kennis te verbeter, jou swakpunte te identifiseer en jou eie foute te korrigeer.

Om 'n goeie slaagsyfer te verseker, beveel ons aan dat jy jou handboek en klasnotas gebruik om self deur die ander aspekte van die kurrikulum te werk.

Oorsig van die Graad 12-eksamen

Die TWEE eksamenvraestelle wat jy aan die einde van die jaar gaan skryf, bestaan uit die volgende onderwerpe:

Vraestel	Onderwerpe	Tydsduur	Totaal	Datum	Nasiening
1	Patrone en rye Finansies, groei en verval Funksies en grafieke Algebra, vergelykings en ongelykhede Differensiaalrekene Waarskynlikheid	3 uur	150	Oktober/ November	Ekstern
2	Euklidiese Meetkunde Analitiese Meetkunde Statistiek en regressie Trigonometrie	3 uur	150	Oktober/ November	Ekstern

Kognitiewe vlak	Beskrywing van vaardighede wat gedemonstreer moet word	Gewig	Benaderde aantal punte in 'n 150 punt vraestel
Kennis	• Feite herroep • Identifisering van die korrekte formule op die inligtingsblad (geen verandering van die onderwerp nie) • Die gebruik van wiskundige feite • Toepaslike gebruik van wiskundige woordeskat • Algoritmes • Skatting en toepaslike afronding van getalle	20%	30 punte
Roetineprose-dures	• Bewyse van voorgeskrewe stellings en afleiding van formules • Doen bekende prosedures • Eenvoudige toepassings en berekeninge wat min stappe behels • Afleiding uit gegewe inligting mag betrokke wees • Identifiseer en gebruik (na die onderwerp verander is) van korrekte formule • Oor die algemeen soortgelyk aan dié wat in die klas ervaar word	35%	52–53 punte
Komplekse prosedures	• Probleme behels komplekse berekeninge en/of hoërorde redenasie • Daar is dikwels nie 'n duidelike pad na die oplossing nie • Probleme hoef nie op lewensegte kontekste gebaseer te wees nie • Kan die maak van beduidende verbande tussen verskillende voorstellings behels • Vereis konseptuele begrip • Daar word van leerders verwag om probleme op te los deur verskillende onderwerpe te integreer	30%	45 punte
Probleemoplos-sing	• Nie-roetine probleme (wat nie noodwendig moeilik is nie) • Probleme is hoofsaaklik onbekend • Hoërorde redenasie en prosesse is betrokke • Kan die vermoë vereis om 'n probleem in sy samestellende dele af te breek. • Interpretasie en ekstrapolasie uit oplossings wat verkry is deur probleme in onbekende kontekste op te los	15%	22–23 punte

Hoe om hierdie studiegids te gebruik

Hierdie studiegids dek sekere aspekte van die verskillende temas van die KABV Graad 12-kurrikulum. Hierdie aspekte word aangebied in dieselfde volgorde as wat dit deur die jaar onderrig word. Die geselekteerde aspekte van elke tema word soos volg aangebied:

- ’n Verduideliking van terme en konsepte
- Uitgewerkte voorbeelde om te verduidelik en te demonstreer
- Aktiwiteite met vrae wat jy moet beantwoord
- Antwoorde wat jou in staat stel om jou werk te kontroleer.

NB	Skenk spesiale aandag	wenk	Wenke om jou te help om ’n konsep te onthou of om jou te lei om probleme op te los	bv.	Uitgewerkte voorbeelde
	Stap-vir-stap-instruksies	eksamen	Verwys na jou vorige eksamenvraestelle		Aktiwiteit met vrae wat jy moet beantwoord

- Die aktiwiteite is gebaseer op eksamentipe vrae. Bedek die antwoorde wat verskaf word met ’n boek of papier en doen self eers elke aktiwiteit. Kontroleer dan jou antwoorde. Beloon jouself vir die dinge wat jy reg doen. As jy antwoorde verkeerd het, maak seker dat jy verstaan wat jy verkeerd gedoen het voordat jy met die volgende afdeling aangaan.
- In hierdie inleidende bladsye gaan ons deur die wiskunde wat jy ken, veral algebra en grafieke. Dit is noodsaaklike vaardighede wat jy nodig het vir enige vak wat van wiskunde gebruik maak. Maak seker dat jy die inhoud op daardie bladsye verstaan voordat jy verder gaan.
- Gaan na www.education.gov.za om vorige eksamenvraestelle af te laai en te oefen.

Top 10-studiewenke

1. Hou al die skryfbehoeftes wat jy nodig het om te studeer, soos penne, potlode, glanspenne, papier, ensovoorts, byderhand.

2. Wees positief. Maak seker dat jou brein die inligting vaslê deur jouself voortdurend te herinner hoe belangrik dit is om die werk te onthou en die punte te kry.

3. Stap nou en dan buite rond. 'n Verandering van omgewing sal jou leervermoë stimuleer. Jy sal verbaas wees hoeveel meer jy inneem nadat jy 'n bietjie vars lug geskep het.

4. Deel jou leertyd in hanteerbare eenhede op. As jy probeer om alles op een slag te leer, sal dit net jou brein moeg, ongefokus en angstig maak.

5. Hou jou studietye kort maar effektief, en beloon jouself met kort, konstruktiewe ruspouses.

6. Verduidelik die konsepte wat jy geleer het aan enigeen wat bereid is om te luister. Dit kan dalk aan die begin vreemd voel, maar dit is beslis die moeite werd om jou hersieningsnotas hardop te lees.

7. Prente en verskillende kleure help jou brein om te leer. Gebruik dit oral waar jy kan.

8. Volstaan met die leerareas wat jy goed ken, en fokus jou breinkrag op die afdelings wat jy sukkel om te onthou.

9. Herhaling is die sleutel om die werk wat jy ken, te onthou. Hou die pas vol en moenie opgee nie.

10. Slaap elke nag ten minste 8 uur lank, eet gesond en drink baie water – dit is alles belangrike dinge wat jy kan doen om jou brein te ondersteun. Voorbereiding vir die eksamen is amper soos harde fisiese oefening, en daarom moet jy fisies voorbereid wees.

As jy dit nie eenvoudig kan verduidelik nie, dan verstaan jy dit nie goed genoeg nie.

Albert Einstein

Geheuerympies

'n Geheuerympie is 'n nuttige tegniek om inligting wat moeilik is om te onthou, in jou geheue vas te lê.

Hieronder is 'n voorbeeld van 'n geheuerympie wat baie in Wiskunde, Wiskundige Geletterdheid en Fisiese Wetenskappe gebruik word:

Hendrik Van Deventer Verkies Ook Appels:

H – **H**akies

V – **V**an of beVel: magte, vierkantswortels, ens.

D – **D**eel

V – **V**ermenigvuldig

O – **O**ptel

A – **A**ftrek

Regdeur hierdie boek sal daar ander geheuerympies gegee word om jou te help om inligting te onthou.

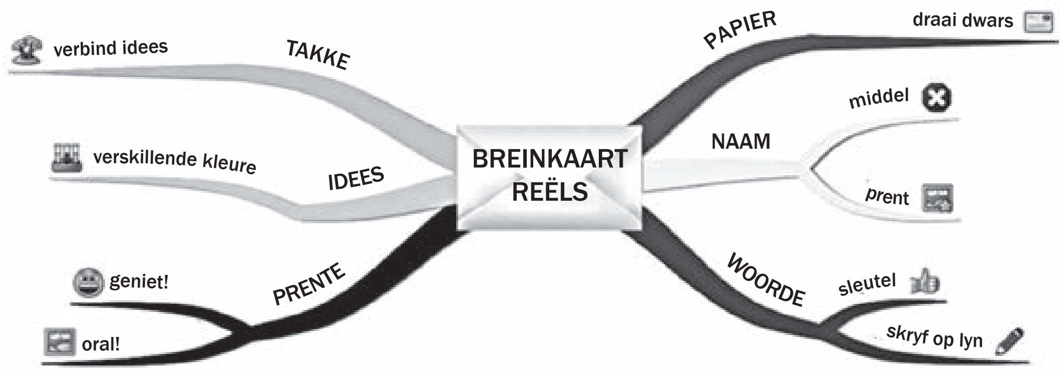
Hoe meer kreatief jy is en hoe meer jy jou inligting in "kodes" skryf, hoe nuttiger sal jou geheuerympies wees.

Opvoeding help mens om nie geïntimideer te voel in vreemde situasies nie.

Maya Angelou

Breinkaarte

Die *Mind the Gap*-studiegidse bevat verskeie breinkaarte (ook genoem geheuekaarte) wat die werk in sommige afdelings opsom.



Breinkaarte werk omdat dit inligting aanbied op dieselfde wyse as waarop ons brein die inligting “sien”.

Wanneer jy die breinkaarte in hierdie studiegids leer, kan jy prente vir elke vertakking byvoeg om jou te help om die inhoud te onthou.

Ontwikkel jou eie breinkaarte soos wat jy elke afdeling voltooi.

Hoe om jou eie breinkaart te ontwikkel:

1. Draai jou papier dwars sodat jou breinkaart in alle rigtings kan uitsprei.
2. Besluit op ’n beskrywende naam vir die breinkaart wat die inligting wat jy daarin gaan opsom bondig saamvat.
3. Skryf die naam in die middel en trek ’n sirkel, borrel of prent rondom die naam.
4. Skryf net sleutelwoorde op die sytakke neer, nie volsinne nie. Hou dit kort en kragtig.
5. Elke tak moet ’n ander idee aantoon. Gebruik ’n ander kleur pen vir elke idee. Verbind die inligting wat saamhoort. Dit sal jou help om die konsepte in te skerp en te verstaan.
6. Maak jou aktiwiteit prettig en voeg gerus prente by; dit maak nie saak as jy nie goed kan teken nie.

Op die dag van die eksamen

1. Sorg dat jy al die skryfbehoeftes vir jou eksamen byderhand het, byvoorbeeld pen, potlood, uitveër, liniaal, gradeboog, passer en sakrekenaar (met vars batterye). Bring ook jou ID-dokument en eksamentoelatingsbrief saam.

2. Wees betyds, arriveer ten minste 'n uur voordat die eksamen begin by die eksamenlokaal.

3. Gaan toilet toe voordat jy die eksamenlokaal binnegaan. Jy wil nie waardevolle tyd verloor deur gedurende die eksamen die lokaal te moet verlaat nie.

4. Gebruik die tien minute leestyd om die instruksies noukeurig deur te lees. Dit help jou om die inligting in jou brein te "ontsluit". Begin met die maklikste vraag om jou denkprosesse aan die gang te sit.

5. Breek die vraag in kleiner dele op om seker te maak jy verstaan presies wat gevra word. As jy die vraag nie behoorlik beantwoord nie, sal jy nie punte daarvoor kry nie. Kyk na die sleutelwoorde in die vraag vir riglyne oor hoe jy dit moet beantwoord. 'n Lys met moeilike woorde (woordeskat) word later in hierdie inleiding verskaf.

6. Probeer om al die vrae te beantwoord. Elke vraag het sekere maklike punte; maak dus seker jy doen ten minste 'n deel van elke vraag in die eksamen.

7. Moenie paniekerig raak nie, selfs al lyk die vraag aanvanklik moeilik. Dit sal wel verband hou met iets wat jy geleer het. Vind die verband.

8. Bestuur jou tyd oordeelkundig. Moenie tyd mors met vrae waaroor jy onseker is nie. Gaan aan en kom terug as die tyd dit toelaat. Doen die vrae waarvan jy die antwoorde weet eerste.

9. Skryf groot en duidelik. Jy sal meer punte kry as die nasiener jou antwoord maklik kan lees.

10. Kyk na hoeveel punte aan elke antwoord toegeken word. Die regmerkies in hierdie studiegids se antwoorde gee jou 'n riglyn van hoe punte toegeken word. Moenie meer of minder inligting gee as wat vereis word nie.

Vraagwoorde wat jou kan help om vrae te beantwoord

Dit is belangrik om die vraagwoorde (die woorde wat jou sê wat om te doen) te identifiseer en te begryp sodat jy presies weet wat die eksaminator verwag. Gebruik die verduidelikings in die tabel hieronder as riglyn wanneer jy vrae beantwoord.

Vraagwoord/-frase	Wat van jou verwag word
Analiseer	Onderskei; ondersoek en interpreteer
Benoem	Gee die naam (selfstandige naamwoord) van iets
Bepaal	Om iets te bereken, of om die antwoord te ontdek deur bewyse te ondersoek
Bereken	Dit beteken 'n numeriese antwoord word vereis – oor die algemeen moet jy jou bewerkings aantoon, veral waar twee of meer stappe betrokke is
Beskryf	Sê in woorde (deur diagramme te gebruik waar toepaslik) wat die hoofpunte van 'n struktuur/ proses/verskynsel/ondersoek is
Bespreek	Oorweeg alle inligting en kom tot 'n gevolgtrekking
Definieer	Gee 'n duidelike betekenis
Gee	Stel van feite sonder bespreking of verduideliking
Identifiseer	Noem die noodsaaklike kenmerke GEE SPESIALE AANDAG
Klassifiseer	Plaas aspekte met soortgelyke kenmerke in dieselfde groep
Lys	Skryf 'n lys van items, met geen bykomende detail nie
Merk/etiketteer	Identifiseer op 'n diagram of tekening
Noem	Verwys na toepaslike punte
Onderskei	Gebruik verskille om kategorieë te bepaal
Stel voor	Gee 'n verduideliking van, sê wat die betekenis is
Tabuleer	Trek 'n tabel en dui die antwoorde as direkte pare aan
Verduidelik	Maak dit wat jy aanbied duidelik, interpreteer dit en gee besonderhede.
Vergelyk	Lys ooreenkomste en verskille tussen dinge, konsepte of verskynsels

Woordeskat

Die volgende woordeskat bestaan uit al die moeilike woorde wat in die *Mind the Gap*-Wiskunde, -Wiskundige Geletterdheid en -Fisiese Wetenskap gebruik word. Ons stel voor dat jy die lys hieronder 'n paar keer deurlees om seker te maak dat jy elke term verstaan. Merk elke term af sodra jy dit verstaan sodat jy maklik kan sien waar jou kennis ontbreek.

SLEUTEL

Afkorting	Betekenis
(ww.)	werkwoord: doenwoord of aksiewoord, soos "loop"
(s.nw.)	selfstandige naamwoord, soos "persoon"
(adj.)	adjektief: beskrywende woord soos "groot"
(byw.)	bywoord: beskryf die werkwoord, soos "vinnig"
(voors.)	voorsetsels: 'n woord wat 'n posisie beskryf, soos "op", "by"
(enk.)	enkelvoud: een van
(meerv.)	meervoud: meer as een van
(afk.)	afkorting
(voorv.)	voorvoegsel

Algemene Terme

Term	Betekenis
A	
Aandui	(ww.) Om iets aan te toon of uit te wys
Aangrensend	(adj.) Langs iets
Afhandel	(ww.) Finaliseer iets of maak dit duidelik; bring iets tot 'n gevolgtrekking.
Afkort	(ww.) Maak korter.
Aflei	(ww.) Om iets uit te werk deur te redeneer
Analiseer/ ontleed	(ww.) Ondersoek iets in detail
B	
Benader	(ww & adj) Kom nader aan (ww.); rofweg, byna, nie presies akkuraat nie, naby maar nie presies nie
Bepaal	(ww.) Werk uit, gewoonlik met 'n eksperiment of berekening, ontdek of soek
Bewys	(ww.) Ondersoek iets in detail
D	
Dalend	(adj.) Gaan af
Data (enkelv. en meerv.)	(s.nw.) Inligting gegee of ingesamel
Definieer	(ww.) Gee die betekenis van 'n woord of woorde
Definisie	(s.nw.) Die betekenis van 'n woord of woorde
Diskreet	(adj) Enkel, apart, duidelik, 'n deel
F	
Fabriek	(s.nw.) 'n Plek waar goedere gemaak word of waar dele saamgevoeg word
Faktor	(s.nw.) 'n Omstandigheid, feit of invloed wat bydra tot 'n resultaat; 'n komponent of deel. 'n Getal wat deelbaar is deur 'n ander getal sonder 'n res
Formaat	(s.nw.) Uitleg of patroon; die manier waarop iets uitgelê is
G	
Gee rekenskap	(ww.) Verduidelik waarom
Gelyktydig	(byw.) Op dieselfde tyd
Gevolgtrek-king	(s.nw.) Slotsom of idee wat iemand uitgewerk het
H	
Hipotese	(s.nw.) 'n Teorie of voorgestelde verduideliking
Hipoteties	(adj.) Teoreties of tentatief; wag vir verdere bewyse.
Horisontaal	(adj.) Dwarsoor, van links na regs of van regs na links (van die "horison", die lyn wat die aarde en lug skei)

I	
Identifiseer	(ww.) Herken of uitwys
Illustreer	(ww.) Gee 'n voorbeeld om te wys wat bedoel word; teken
Impliseer	(ww.) Stel voor sonder om direk te sê wat bedoel word
K	
Kategorie	(s.nw.) Klas of groep dinge
Kompleks	(adj.) Bestaan uit baie verskillende dele; nie maklik om te verstaan nie. (s.nw.) 'n groep of stelsel van dinge wat op 'n gekompliseerde wyse saamgestel is
Komponent	(s.nw.) 'n Deel
M	
Manipuleer	(ww.) Hanteer of kontroleer ('n ding of 'n persoon)
Meervoudig	(adj.) Baie
Model	(s.nw.) 'n Goeie of tipiese voorbeeld
Motiveer	(ww.) Gee iemand 'n rede waarom iets gedoen moet word
N	
Numeries	(adj.) Wat verband hou of uitgedruk word as 'n getal of getalle
O	
Omgekeerd	(byw.) Die teenoorgestelde van
Onbeduidend	(adj.) Klein en gering
Onderskei-delik	(adj.) Met betrekking tot mekaar, in verband met items wat in dieselfde volgorde gelys is
Ondersoek	(ww.) Navorsing doen of 'n studie maak van iets
Ontdekking	(s.nw.) Resultate van 'n soeke of onthulling
Onvoldoende	(adj.) Nie genoeg nie
Oorbodig	(adj.) Meer as wat nodig is
Oordeelkun-dig	(adj.) Versigtig, beleefd
Oortref	(ww.) Om verder te gaan
Oorvloed	(s.nw.) Meer as wat nodig is
Oorweeg	(ww.) Nadink
Opeenvol-gend	(adj.) Een na die ander sonder onderbrekings
Opname	(s.nw.) 'n Algemene oorsig, ondersoek of beskrywing van iemand of iets
Opname maak	(ww.) Kyk van naderby na of ondersoek; oorweeg 'n wyer reeks opinies of opsies
Opteken	(ww.) Maak 'n aantekening van iets om later daarna te verwys
Optekening	(s.w) 'n Aantekening wat gemaak is om later daarna te verwys; bewys van iets; 'n kopie van iets
Optimaal	(adj.) Die beste; mees gunstige
R	
Relatief	(adj.) Het betrekking op iets anders
Resiprook	(adj.) Omgekeerd
Respekteer	(ww.) Bewonder iets of iemand; neem die gevoelens of behoeftes van 'n ander persoon in ag
S	
Saamgesteld	(adj.) Gevorm uit verskillende dele
Saamstel	(ww.) Om te vorm uit dele
Samestelling	(s.nw.) Iets wat uit dele gemaak is
Stygend	(adj.) Gaan op
T	
Talle	(adj.) Baie
Teenstelling	(s.nw.) Iets wat baie anders is as waarmee dit vergelyk word.
Tendens	(s.nw.) 'n Neiging om iets op 'n bepaalde manier te doen; 'n gewoonte
Toepas	(ww.) Maak 'n formele toepassing; is van toepassing
Transversaal	(s.nw.) Strek dwars oor iets
U	
Uitgesonderd	(voors.) Nie inbegrepe nie
Uitsluitend	(adj.) Uitgesonderd of nie by ander dinge toegelaat nie; uitgehou vir een bepaalde groep of persoon

V	
Vasstel	(ww.) om te wys of te bewys, om op te stel of te skep
Verbinding	(s.nw.) Wanneer twee of meer dinge op dieselfde punt bymekaarkom
Vergelyk	(ww.) Toon die verskil aan tussen
Verklaring	(s.nw.) Iets waarby kommentaar of verduidelikings, wat gewoonlik geskryf word, gevoeg word
Verkry	(ww.) Kry
Verskaf	(ww.) Beskikbaar maak vir gebruik; gee
Versus	(voors.) Teenoor. Afgekort as "vs" en soms "v"
Verteenwoordig	(ww.) Aangestel om vir iemand op te tree of te praat;
Vertikaal	(adj.) Regop; reguit boontoe
Vertoon	(ww.) Om aan te toon of te wys
Vertoonstuk	(s.nw.) 'n Deel van 'n uitstalling
Vice versa	(byw.) Omgekeerd
Volstaan	(ww.) Genoegsaam wees
Vonds	(s.nw.) Inligting wat ontdek is as 'n resultaat van 'n navraag
Vrygestel	(adj.) Nie meer gebind nie en onthef van pligte
Vrystel	(ww.) Om vry te wees van 'n plig
Vrystelling	(s.nw.) Om vry te wees van 'n verpligting.
W	
Willekeurig	(adj.) Gebaseer op ewekansige keuse; onbeperk en outokraties
Wisselbaar	(adj.) Kan met mekaar omgeruil of uitgeruil word

Tegniese Terme

A	
Absis	(s.nw.) Die afstand vanaf 'n punt na die vertikale of y-as, word ewewydig aan die horisontale as of x-as gemeet; die koördinaat. Sien ordinaat.
Afgeleide	(s.nw.) Wiskunde: Die veranderingstempo van 'n funksie met betrekking tot 'n onafhanklike veranderlike. Sien onafhanklike veranderlike. In algemene gebruik: iets wat uit iets anders kom.
Afhanklik (veranderlike)	(adj./s.nw.) 'n Veranderlike waarvan die waarde van 'n ander afhang; die uitkoms van 'n eksperiment; die resultate. Sien ook onafhanklike veranderlike en beheerveranderlike. Die afhanklike veranderlike het waardes wat afhang van die onafhanklike veranderlike, en ons stip dit op die vertikale as.
Afleiding	(s.nw.) Wiskunde: om die bewerkings van jou rekenkunde of antwoord of oplossing aan te toon; die proses om 'n afgeleide te bepaal.
Afmeting	(s.nw.) Die meetbare grootte of omvang van 'n meetkundige vorm oor die algemeen en dikwels op 'n Cartesiese Koördinaatstelsel, bv. die x-afmeting (breedte)
Afrond	(ww.) Om te benader, veral 'n irrasionale getal, na 'n korter reeks desimale getalle.
Afsnit	(s.nw.) Waar 'n lyn 'n as op 'n grafiek sny. Sien sny.
Afwyking	(s.nw.) 'n Variasie van die statistiese norm; nie so ver uit soos 'n uitskieter nie. Die hoeveelheid waardeur 'n enkele mate verskil van 'n vaste waarde soos die gemiddelde. 'n Betekenisvolle afwyking vanaf die gemiddelde waarde.
Aksioma	(s.nw.) 'n Basiese waarheid van wiskunde.
Algebra	(s.nw.) 'n Wiskundestelsel waar onbekende kwantiteite deur letters voorgestel word, wat gebruik kan word om komplekse berekenings met sekere reëls te doen.
Annuïteit	(s.nw.) 'n Vaste bedrag wat na aftrede maandeliks aan iemand betaal word, tipies vir die res van hul lewe, as 'n versekeringspolis.
Annum, per (ook per jaar)	(byw.) Vir die hele jaar (bv. "Jy moet R100 per annum betaal".)

As	(s.nw.) 'n Lyn waarop punte gestip (geplaas) kan word om te wys hoe ver dit vanaf 'n sentrale punt, wat die oorsprong genoem word, is. Sien oorsprong. "Vertikale as" of "y-as" verwys na hoe hoog na bo 'n punt vanaf die oorsprong is (of hoe ver onder). "Horisontale as" of "x-as" verwys na hoe ver links of regs 'n punt van die oorsprong af is.
Asimptoot	(s.nw.) 'n Lyn wat 'n gegewe kromme voortdurend nader maar dit nie op enige eindige afstand raak nie.
B	
Basis	(s.nw.) Die horisontale laagste lyn op 'n diagram van 'n geometriese vorm, gewoonlik van 'n driehoek.
Beheer/ kontroleer	(ww.) Om seker te maak iets verander nie sonder dat dit toegelaat word om te verander nie.
Beheerveranderlike	(s.nw.) 'n Veranderlike wat konstant gehou word om die verwantskap tussen twee ander veranderlikes te ontdek. "Beheerveranderlike" moenie verwar word met "Beheerde veranderlike" nie (sien onafhanklike veranderlike).
Belasbaar	(adj.) 'n Diens, aankope of item of inkomste waarop belasting gehef word.
Belasting	(s.nw.) 'n Verpligte heffing wat op landsburgers se inkomste of aankope gelê word om die aktiwiteite van die regering te befonds.
Bepaal	(ww.) Maak dat iets gebeur; om vas te stel; om die oorsaak te vind.
Bepaalde	(adj.) 'n Spesifieke ding wat uitgewys of bespreek word; om 'n lid van 'n groep of iets uit te sonder of uit te wys.
Bi-	(voorv.) Twee.
Binoom/ tweeterm	(s.nw.) 'n Algebraïese uitdrukking van die som of die verskil van twee terme.
Bivariaat	(adj.) Afhanklik van twee veranderlikes.
Boskrif	(s.nw.) 'n Getal aan die bokant van die res van die lyn, bv. πr^2.
Breedte	(s.nw.) Hoe wyd iets is.
Breuk	(s.nw.) Wiskunde: Nie 'n telgetal nie; 'n verteenwoordiging van 'n deling. 'n Deel, bv. die derde breuk van twee is 0,666 of $\frac{2}{3}$ wat beteken twee wat in drie dele verdeel is.
D	
Definisieversameling	(s.nw.) Die moontlike versameling x-waardes vir 'n grafiek van 'n funksie. Sien waardeversameling.
Deler	(s.nw.) Die getal onder die lyn in 'n breuk; die getal wat die ander getal bokant die breuklyn verdeel. Sien teller, noemer.
Derdegraads of kubies	(adj.) Gevorm soos 'n kubus; is drie keer met homself vermenigvuldig
Diagonaal	(adj./s.nw.) 'n Lyn wat twee teenoorstaande hoeke van 'n vorm met hoeke verbind.
Diameter	(s.nw.) Die lyn wat deur die middelpunt van 'n vorm loop, van een sy van die vorm na die ander, veral 'n sirkel. Formule: d = 2r. Sien radius, omtrek.
Diskriminant	(s.nw.) 'n Funksie van die koëffisiënte van 'n polinoomvergelyking waarvan waardes inligting gee oor die wortels van die polinoom.
Drievoudig	(adj.) Drie maal soveel.
E	
Eenheid	(s.nw.) 'n Onderafdeling van 'n skaal. Sien skaal.
Eksponensiaal	(adj.) Om iets baie keer te vermenigvuldig; 'n kromme wat 'n eksponent verteenwoordig.
Eksponent	(s.nw.) Wanneer 'n getal verhef word tot 'n mag, d.i. soveel keer met homself vermenigvuldig word as wat die mag aandui (die klein getalletjie bo die grondtal). Dus, 2^3 beteken 2 x 2 x 2.

Ekstrapolasie	(s.nw.) Om die lyn van 'n grafiek verder te trek, in waardes wat nie empiries opgeteken is nie, om 'n toekomstige gebeurtenis of resultaat te voorspel. In gewone taal: om te sê wat gaan gebeur gebaseer op vorige resultate wat verkry is deur eksperimentering of meting. As jy 'n grafiek het en sekere resultate opgeteken het (bv. verandering vs tyd) en jy trek die lyn verder in dieselfde kromme, om te sê watter toekomstige resultate jy sal kry, word dit ekstrapolasie genoem. Sien voorspel. Wiskunde: om 'n ander iterasie, waarde of oplossing te voorspel wat gebaseer is op 'n formule wat 'n vorige oplossing formuleer.
Element	(s.nw.) Wiskunde: deel van 'n versameling getalle. Algemene gebruik: deel van.
Elimineer	(ww.) Om uit 'n breuk te verwyder. Sien kanselleer.
Enkelvoudige rente	(s.nw.) Rente wat slegs gehef word op die oorspronklike bedrag wat geskuld word, lei elke keer tot dieselfde bedrag.
Euklidiese	(adj.) Het betrekking op die meetkunde van regluitlyne op plat vlakke.
Ewe	(adj.) Deelbaar deur twee sonder 'n res.
Ewekansig	(adj.) Onvoorspelbaar, het geen oorsaak of bekende oorsaak nie. Word gedoen sonder beplanning.
Eweredigheid	(s.nw.) Om iets in verband te bring met iets anders op 'n reëlmatige manier, om deel te wees van iets met betrekking tot sy volume, grootte, ens; om te verander namate iets anders verander. Sien korreleer en onderskeidelik.
Ewewydig/ parallel	(adj.) Hou 'n gelyke afstand langs 'n lengte vanaf 'n ander item (lyn, voorwerp, figuur). Wiskunde: twee lyne loop langs mekaar maar hou altyd 'n gelyke afstand tussen hulle.
F	
Faktoriseer	(ww.) Om in faktore te ontbind.
Fakulteit	(s.nw.) Die produk van 'n heelgetal en al die heelgetalle onder dit; bv. fakulteit vier (4!) is gelyk aan 24.
Formule	(s.nw.) Sien uitdrukking.
Frekwensie	(s.nw.) Hoe dikwels. Gewoonlik word dit as 'n breuk voorgestel, bv. $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ of 0,25.
Funksie	(s.nw.) Wiskunde: wanneer twee eienskappe of hoeveelhede korreleer. As y verander soos x verander, dan is y = f(x). Sien korreleer, grafiek, Cartesiese, as, koördinaat. Ook: 'n verhouding met meer as een veranderlike (wiskunde).
G	
Geleidelik	(byw.) Om stadig te verander of te beweeg.
Gelykbenig (driehoek)	(s.nw./adj.) 'n Driehoek waarvan twee sye ewe lank is.
Gelykhoekig	(adj.) Het dieselfde hoek.
Gelyksydig	(adj.) Het sye wat ewe lank is.
Gemiddeld	(s.nw.) Wiskunde: Die som van dele gedeel deur die hoeveelheid dele. Algemene gebruik: nie baie goed, sterk, ens. nie maar ook nie baie swak, sleg, ens. nie; in die middel. As jy gevra word om die gemiddeld te bepaal, moet jy dit bereken met die inligting wat jy het. Byvoorbeeld, die gemiddeld van (1;2;3) is 2 want (1+2+3)/3 = 2. Sien ook gemiddelde, mediaan en modus.
Gemiddelde	(s.nw.) Sien gemiddeld.
Geometrie/ meetkunde	(s.nw.) Die wiskunde van vorm.
Geometries	(adj.) Vorder of groei in 'n reëlmatige verhouding.
Gradiënt	(s.nw.) 'n Helling. 'n Toename of afname in 'n eienskap of mate. Ook die koers van so 'n verandering. In die formule vir 'n lyngrafiek, y = mx + c, is m die gradiënt.
Grafiek	(s.nw.) 'n Diagram wat eksperimentele of wiskundige waardes of resultate voorstel. Cartesiese koördinate.
Grafies	(adj.) Duidelik of helder of opmerklik.
Grafika	(s.nw.) 'n Diagram of grafiek.
Grondtal	(s.nw.) 'n Getal ingevolge waarvan ander getalle as logaritmes uitgedruk word. Of 'n getal wat gebruik word as die basis van 'n numeringskaal.
H	
Halveer	(ww.) Om in twee te deel.

Heelgetal	(s.nw.) 'n Telgetal wat nie 'n breuk is nie, kan negatief wees.
Helling	(s.nw.) Sien gradiënt.
Hiperbool	(s.nw.) Wiskunde: 'n grafiek van 'n deel van 'n keël waarvan die eindpunte van die grafiek af is; 'n simmetriese (albei kante is dieselfde) oop kromme.
Histogram	(s.nw.) 'n Staafgrafiek wat kontinue (ononderbroke) data voorstel (d.i. data sonder gapings). Daar is geen spasies tussen die stawe nie. 'n Histogram wys die frekwensie, of die aantal kere, wat iets binne 'n spesifieke interval of "groep" inligting gebeur.
Hoek	(s.nw.) Die verskil in posisie tussen twee reguitlyne wat by 'n punt bymekaarkom, word in grade gemeet.
Homologies	(s.nw.) Behorende aan dieselfde groep dinge; analogies.
I	
Imaginêre getalle	(s.nw.) I; 'n getal wat 'n veelvoud is van die vierkantswortel van (-1) Die teenoorgestelde van reële getalle. Nie in die eksamen nie/gevorderd.
Inflasie	(s.nw.) Dat pryse verhoog met verloop van tyd; dat die waarde van geld verlaag met verloop van tyd. Algemene gebruik: die aksie om groter te word.
Inlig	(ww.) Om te verduidelik, om lig te werp.
Interkwartiel	(adj.) Tussen kwartiele. Sien kwartiel.
Interval	(s.nw.) Gaping. 'n Verskil tussen twee mates.
Inverse	(s.nw.) Die teenoorgestelde van. Wiskunde: een gedeel deur, bv. $\frac{1}{2}$ is die inverse van 2.
Irrasionale getalle	(s.nw.) Breuke wat repeteer, of wat nie as 'n verhouding van telgetalle uitgedruk kan word nie. Desimale.
J	
Jaarliks	(adj.) Een maal elke jaar (bv. "Kersfees is 'n jaarlikse vakansie".

Jaart/tree	(s.nw.) Ou Imperiale mate van lengte, ongeveer gelyk aan 'n meter (1,09 m).
K	
Kans	(s.nw.) Dieselfde as waarskynlikheid; dat iets miskien kan gebeur maar dit is moeilik om te voorspel of dit sal.
Kanselleer	(ww.) Om 'n faktor te verwyder deur met die faktor te deel.
Koëffisiënt	(s.nw.) 'n Konstante waarde wat langs 'n algebraïese simbool geskryf word as 'n vermenigvuldiger. Dieselfde as konstante (sien konstante). Of: 'n vermenigvuldiger of faktor wat 'n eienskap meet, bv. wrywingskoëffisiënt.
Koers	(s.nw.) Hoe dikwels per sekonde (of per enige ander tydperk). Fisika: aantal gebeurtenisse per sekonde, sien frekwensie. Finansies: die wisselkoers vir 'n ander geldeenheid; hoeveel eenhede van een geldeenheid dit kos om 'n eenheid van 'n ander geldeenheid te koop. Ook "rentekoers", of watter persentasie van 'n lening uit rentekoste of fooie bestaan.
Komplement	(s.nw.) Meetkunde: die hoeveelheid in grade waar 'n gegewe hoek minder is as 90°. Wiskunde: die dele van 'n versameling of klas wat nie dele is van 'n gegewe deelversameling nie. Moenie dit verwar met kompliment (prys) nie.
Konstante	(s.nw.) Sien koëffisiënt. Beteken "onveranderd".
Kontinue	(adj.) Wiskunde: het geen onderbrekings tussen wiskundige punte nie; 'n ononderbroke grafiek of kromme stel 'n kontinue funksie voor. Sien funksie.
Kontrole	(s.nw.) 'n Eksperimentele situasie waar niks gedoen is nie, om met 'n aparte eksperimentele situasie, wat die "eksperiment" genoem word waarin 'n verandering probeer word, te vergelyk. Die kontrole word dan met die eksperiment vergelyk om te sien of 'n verandering plaasgevind het.

Koord	(s.nw.) 'n Lyn wat deur 'n sirkel of boog sny by 'n posisie wat nie die diameter is nie.
Koördinaat	(s.nw.) Die x- of y-posisie van 'n punt op 'n Cartesiese grafiek, gegee as 'n x- of y-waarde. Koördinate (mv.) word gegee as 'n geordende paar (x; y).
Korrelasie	(s.nw.) Dat daar 'n verwantskap is tussen twee dinge, sonder om aan te toon dat een ding die ander veroorsaak.
Korreleer	(ww.) Om 'n verwantskap tussen twee dinge te sien of waar te neem sonder om aan te toon dat die een die ander een veroorsaak.
Korreleer	(ww.) Om dinge af te paar in 'n korrelasieverwantskap. Vir twee dinge om ooreen te stem of te pas. Bv. A korreleer met 1, B korreleer met 2; C korreleer met 3, ens.
Kwadraat	(s.nw.) Die eksponent 2 (bv. die kwadraat van 4 is 42 = 16).
Kwadreer	(ww.) Vermenigvuldig met homself, verhef tot die mag 2. Sien kwadraat.
Kwalitatief	(adj.) Met betrekking tot die kwaliteit of eienskappe van iets. 'n Kwalitatiewe ontleding kyk na veranderinge in eienskappe soos kleur, dit kan nie in getalle omskryf word nie. Vorm dikwels 'n teenstelling met kwantitatief.
Kwantitatief	(adj.) Met betrekking tot, of vergelykenderwys, met hoeveelhede. Vorm dikwels 'n teenstelling met kwalitatief. 'n Kwantitatiewe ontleding is een waarin jy getalle, waardes en mates vergelyk.
Kwantiteit	(s.nw.) Hoeveelheid.
Kwartiel	(s.nw.) 'n Kwart van 'n liggaam of data wat as 'n persentasie voorgestel word. Dit is die verdeling van data in 4 gelyke dele van 25% elk. Om die kwartiele te bepaal, deel eers die inligting in twee gelyke dele om die mediaan (Q2) te bepaal en deel dan die eerste helfte in twee gelyke dele, die mediaan van die eerste helfte is die onderste kwartiel (Q1), verdeel dan die tweede helfte in twee gelyke dele, en die mediaan van die tweede helfte is die boonste kwartiel (Q3). Data kan opgesom word met vyf waardes wat die vyfgetalopsomming genoem word, d.i. die minimumwaarde, onderste kwartiel, mediaan, boonste kwartiel en maksimumwaarde.
Kwosiënt	(s.nw.) 'n Verhouding.
L	
Lewer	(ww.) Gee 'n antwoord of 'n oplossing.
Lineêr	(adj.) In 'n lyn. Wiskunde: in 'n direkte verwantskap wat, wanneer dit met Cartesiese koördinate op 'n grafiek geteken word, 'n reguitlyn is.
Logaritme	(s.nw.) 'n Hoeveelheid wat die mag verteenwoordig waartoe 'n vaste getal (die grondtal) verhef moet word om 'n gegewe getal te gee. Die grondtal van 'n algemene logaritme is 10, en dié van 'n natuurlike logaritme is die getal e (2,7183...). 'n Log grafiek kan 'n geometriese of eksponensiaal verwantskap, wat oor die algemeen gekrom is, in 'n reguitlyn verander.
Loodreg	(adj.) Normaal; met regte hoeke tot (90°).
M	
Manipuleer	(ww.) Om iets te verander of te herrangskik. Gewoonlik beteken dit in wiskunde om 'n formule te herrangskik om iets op te los om 'n antwoord te kry.
Mediaan	(s.nw.) Wiskunde: die getal in die middel van 'n reeks getalle wat in volgorde uitgeskryf is.
Metries/ metriek	(adj.) 'n Maatstelsel, wat 'n grondtal 10 gebruik (d.i. al die eenhede is deelbaar deur 10). Die VSA gebruik iets wat bekend staan as die Imperiale stelsel wat nie in wetenskap gebruik word nie. Die Imperiale stelsel is gegrond op 12. Voorbeelde: 2,54 cm (metries) = 1 duim (imperiaal). 1 voet = 12 duim = ongeveer 30 cm; 1 meter = 100 cm. 1 Fl.Oz (vloeistofons) = ongeveer 30 ml.
Minimaliseer/ verklein	(ww.) Om so klein as moontlik te maak.
Minimum	(adj.) Het betrekking op die modus, of metode. Kan beteken: oor die wiskundige modus of oor die metode wat gebruik word. Sien modus.

Model	(s.nw.) 'n Algemene of vereenvoudigde manier om 'n ideale situasie te beskryf, in wetenskap, 'n wetenskaplike beskrywing wat alle gevalle van die soort ding wat waargeneem word, dek. 'n Voorstelling.
Modus	(s.nw.) Die mees algemene getal in 'n reeks getalle. Sien ook gemiddelde, mediaan.
N	
Nader	(ww.) Om naby te kom in waarde.
Natuurlike getalle	(s.nw.) Enige getal wat nie 'n breuk is nie en wat groter is as -1 (nul is ingesluit). Positiewe heelgetalle.
Negatiewe	(adj.) Onder nul.
Normaal	(s.nw./adj.) Wiskunde en Wetenskap: 'n krag, vektor of lyn wat met regte hoeke tot 'n ander krag, vektor of lyn of voorwerp optree. (s.nw.) Algemene gebruik: reëlmatig of standaard (adj.).
O	
Ogief	(adj.) 'n Gepunte boogvorm; 'n kumulatiewe frekwensiegrafiek.
Omtrek	(s.nw.) Die afstand rondom die buitekant van 'n sirkel.
Onafhanklik (veranderlike)	(s.nw.) Die dinge wat optree as inset tot die eksperiment, die potensiële oorsake. Ook genoem die beheerde veranderlike. Die onafhanklike veranderlike word nie verander deur ander faktore nie, en ons stip dit op die horisontale as. Sien beheer, afhanklike veranderlike.
Onderling	(adj.) Met betrekking tot mekaar, beïnvloed mekaar.
Onewe	(adj.) Nie deelbaar deur twee sonder 'n res nie.
Ongelykbenig	(adj.) 'n Driehoek met ongelyke sye.
Ongelykheid	(s.nw.) 'n Verhouding tussen twee uitdrukkings wat nie gelyk is nie, deur 'n teken soos ≠ "nie gelyk aan", > "groter as" of < "kleiner as" te gebruik.
Onvoldoende	(adj.) Nie genoeg nie.
Oorhel	(ww.) Om te leun.
Oorsprong	(s.nw.) Wiskunde: die middelpunt van 'n Cartesiese koördinaatstelsel. Algemene gebruik: die bron van iets; waar dit vandaan kom.

Opeenvolgend	(adj.) Volg van een na die ander.
Oplos	(ww.) Om met 'n oplossing (antwoord) te voorskyn te kom. Toon jou bewerkings.
Oplossing	(s.nw.) Wiskunde: die stap-vir-stap-vertoning van berekenings om by die antwoord uit te kom. Algemene gebruik: die antwoord op 'n probleem, in die sin van die oplossing (verwydering) van 'n probleem.
Oppervlakte	(s.nw.) Lengte x breedte (wydte).
Optimaal	(adj.) Die beste, die meeste.
Ordinaat	(s.nw.) 'n Reguitlyn vanaf enige punt ewewydig aan een koördinaat-as en wat die ander kruis, veral 'n koördinaat ewewydig gemeet aan die vertikale as. Sien absis.
P	
Parallelogram	'n Viersydige figuur met twee ewewydige sye. Afkorting: parm.
Parameter	(s.nw.) 'n Waarde of algebraïese simbool in 'n formule. Statistiek: 'n numeriese eienskap van 'n populasie, teenoor 'n statistiek van 'n steekproef. 'n Hoeveelheid waarvan die waarde vir die bepaalde omstandighede gekies is en met betrekking tot watter ander veranderlike hoeveelhede teenwoordig kan wees.
Pent-	(voorv.) Vyf.
Pentagoon	(s.nw.) 'n Vyfsydige figuur waarvan al die sye ewe lank is.
Per	(voors.) Vir elke, volgens.
Periode	(s.nw.) Die tydperk tussen gebeurtenisse; 'n seksie van tyd.
Periodiek	(adj.) Gereeld; gebeur gereeld.
Permutasie	(s.nw.) Die aksie om die reëling te verander, veral die lineêre volgorde van 'n versameling items.
Persent	(byw.) Vir elke deel in 100. Die koers per honderd.
Persentiel	(s.nw.) 'n Verdeling van persentasies in onderafdelings, bv. as die skaal in vier verdeel is, is die vierde persentiel enigiets tussen 75 en 100%.
Pi	(s.nw.) π die Griekse letter p, die verhouding van die omtrek van 'n sirkel tot sy diameter. 'n Konstante sonder eenhede met 'n waarde van ongeveer 3,14159.

Piramide	(s.nw.) 'n Poliëder waarvan een vlak 'n poligoon is met enige aantal sye, en die ander vlakke driehoeke is met 'n gemeenskaplike toppunt.
Plan	(s.nw.) Argitektuur: 'n diagram wat die uitleg en struktuur van 'n gebou voorstel, veral uit die bo-aansig. Meer algemene gebruik: enige ontwerp of diagram, of enige voorgenome opeenvolging van aksie, bedoel om 'n doel te bereik.
Poli-	(voorv.) Baie.
Poliëder/ veelvlak	(s.nw.) 'n Driedimensionele vorm met baie plat sye wat gewoonlik identies is.
Poligoon/ veelhoek	(s.nw.) Enige vorm met baie (ten minste drie) gelyke sye en hoeke.
Polinoom	(s.nw.) 'n Uitdrukking van meer as twee algebraïese terme, veral die som van verskeie terme wat verskillende magte van dieselfde veranderlike(s) bevat.
Populasie	(s.nw.) Statistiek: die groter liggaam waaruit die statistiese steekproef geneem word.
Positiewe	(adj.) Bokant nul.
Priemgetal	(s.nw.) Enige getal wat deelbaar is deur homself en een.
Produk	(s.nw.) Wiskunde: die resultaat van die vermenigvuldiging van twee getalle.
Projek	(s.nw.) 'n Plan van aksie of langtermyn aktiwiteit wat bedoel is om iets te produseer of 'n doel te bereik.
Projekteer/ beraam	(ww.) Om iets te gooi, of om iets te raai of te voorspel ('n projeksie). Om 'n resultaat te voorspel. Sien ekstrapoleer.
R	
Raaklyn	(s.nw.) 'n Reguitlyn wat 'n kromme by slegs een punt raak, dui die helling van die kromme by daardie punt aan.
Radius	(s.nw.) Die afstand tussen die middelpunt van 'n voorwerp, gewoonlik 'n sirkel, en sy omtrek of buitekant.
Rasionale getalle	(s.nw.) 'n Breuk wat as 'n verhouding van telgetalle uitgedruk kan word. Sien irrasionale getalle.

Reële getal	(s.nw.) Enige nie-denkbeeldige getal, dit is, 'n getal wat nie 'n veelvoud of die vierkantswortel van (-1) is nie. Sluit rasionale en irrasionale getalle, heelgetalle in.
Reghoek	(s.nw.) 'n Parallelogram met slegs regte hoeke (90°).
Regte hoek	(s.nw.) 'n Hoek van 90°.
Rekening (calculus)	(s.nw.) 'n Afdeling van wiskunde wat te doen het met die bepaling en eienskappe van afgeleides en integrale van funksies, deur metodes wat oorspronklik gebaseer was op die sommering van infinitesimaal (oneindig klein) verskille. Die twee hoofsoorte is differensiaalrekening en integraalrekening.
Rente	(s.nw.) Finansies: geld wat gereeld teen 'n bepaalde koers betaal word vir die gebruik of leen van geld. Dit kan deur 'n finansiële organisasie of bank aan jou betaal word (in die geval van spaargeld), of dit kan deur jou aan 'n finansiële organisasie of bank betaal word vir geld wat jy van die organisasie geleen het. Sien saamgestelde rente en enkelvoudige rente, sien ook leen.
Res	(s.nw.) Oorblyfsel. Wiskunde: 'n hoeveelheid wat oorbly nadat gedeel is en wat nie verder gedeel kan word tensy mens 'n desimale getal of breuk as 'n resultaat wil hê nie, d.i. waar die deler nie die noemer presies deur 'n heelgetal deel nie.
Resiprook	(s.nw.) 'n Komplement van 'n getal wat wanneer dit by die ander getal getel word, 1.0 lewer.
Rombus/ruit	(s.nw.) 'n Vierhoek (viersydige) figuur (diagram of vorm) met gelyke sye, maar geen regte hoeke (90° hoeke) nie.
S	
Saamgestelde	(adj.) Bestaan uit dele.
Saamgestelde rente	(s.nw.) Rente gehef op 'n bedrag wat verskuldig is, maar wat rente tot op datum insluit. Vergelyk met enkelvoudige rente.
Sfeer	(s.nw.) 'n Perfekte ronde driedimensionele vorm. 'n Bal.
Siklies	(adj.) Het betrekking op 'n sirkel.

Silinder	(s.nw.) 'n Lang vorm met ewewydige sye en 'n sirkelvormige dwarssnit – dink aan 'n houtblok, byvoorbeeld, 'n pyp.
Skaal	(s.nw.) 'n Maatstelsel, met gereelde intervalle of gapings tussen eenhede (onderafdelings) van die skaal.
Skat	(ww.) Om 'n benaderde waarde naby aan die werklike waarde te gee; 'n onnoukeurige berekening.
Skerp	(adj.) Het 'n hoek van minder as 90°.
Skuinssy	(s.nw.) Die langste sy van 'n reghoekige driehoek.
Snit of sny	(ww.) 'n Onderafdeling van 'n lyn of punt waar een lyn 'n ander lyn kruis.
Snyding	(s.nw.) Waar twee groepe oorvleuel in 'n Venndiagram.
Som	(s.nw.) Om dinge op te tel. Voorgestel met die Griekse Sigma simbool $\sum$ of die plusteken (+).
Statistiek	(s.nw.) Die wiskunde van kans en waarskynlikheid.
Steil	(adj.) Het 'n groot gradiënt.
Stelling	(s.nw.) 'n Algemene voorstelling wat nie vanselfsprekend is nie maar deur 'n reeks redenasies bewys word; 'n waarheid wat vasgestel word deur middel van aanvaarde waarhede. Vergelyk met teorie.
Stelling van Pythagoras	(s.nw.) Die kwadraat van die skuinssy is gelyk aan die som van die kwadrate van die ander twee sye van 'n reghoekige driehoek. Waar s die skuinssy, a die aangrensende sy aan die regte hoek, en b die ander sy is: $s^2 = a^2 + b^2$.
Stip	(ww.) Om punte op 'n Cartesiese koördinaatstelsel te plaas; om 'n grafiek te teken.
Stomp	(adj.) Het 'n hoek groter as 90° maar minder as 180°.
Straal	(s.nw.) 'n Lyn van 'n versameling lyne wat deur dieselfde middelpunt gaan. Sien radius.
Subtotaal	(s.nw.) Finansies: die totale bedrag verskuldig op 'n staat of rekening, gewoonlik sonder BTW (belasting). OF: 'n totaal van 'n afdeling van 'n staat of rekening of reeks rekeninge, maar nie die totaal van die hele rekening of staat nie.
Syfer	(s.nw.) 'n Getal wat in skrif voorgestel word.

T	
Tabelleer	(ww.) Om 'n diagram te teken wat waardes op Cartesiese asse vergelyk.
Telgetal	(s.nw.) Enige getal wat nie 'n breuk of desimale getal is nie, groter as nul. Natuurlike getalle en nul.
Teller	(s.nw.) Die teenoorgestelde van noemer; die boonste getal van 'n breuk.
Telling	(s.nw.) 'n Totale aantal; om in vywe te tel deur vier vertikale lyne te maak en dan dit met die vyfde lyn te kruis.
Tendens	(s.nw.) Reëlmatige patrone binne data.
Teorie	(s.nw.) 'n Wiskundige verteenwoordiging van 'n verduideliking vir iets in die wetenskap, wat nie afhang van die ding wat verduidelik word nie.
Tetra-	(voorv.) Vier.
Toppunt	(s.nw.) Die tip van 'n driehoek of waar twee lyne bymekaarkom.
Toppunt/ hoekpunt	(s.nw.) Die hoekpunt(e) van 'n veelhoek.
Trapesium	(s.nw.) 'n Vierhoek met een paar ewewydige sye (en die ander sye het gewoonlik komplimentêre hoeke).
Trigonometrie	(s.nw.) Die verwantskappe en verhoudings tussen sye en hoeke binne 'n reghoekige driehoek.
U	
Uitdrukking	(s.nw.) 'n Formule of vergelyking.
Uitskieter	(s.nw.) Statistiek: 'n datapunt wat ver buite die variasiewydte van die verwante of nabygeleë datapunte lê.
V	
Venndiagram	(s.nw.) 'n Diagram wat versamelings (klasse of voorwerpe) as sirkels voorstel.
Veranderlike	(s.nw.) 'n Letter wat gebruik word om 'n onbekende hoeveelheid in algebra te verteenwoordig; 'n kwantiteit wat verander.

Vereenvoudig	(ww.) Om iets eenvoudiger te maak. Wiskunde: om deur 'n gemeenskaplike faktor (getal of algebraïese letter) te deel wat dit makliker sal maak om die vergelyking te lees en te bereken.
Vereniging	(adj.) Wanneer twee versamelings in 'n Venndiagram in een versameling oorvleuel.
Verhef tot die derde mag	(adj.) Tot die mag drie; drie keer met homself vermenigvuldig.
Verhouding	(s.nw.) 'n Breuk; hoe een getal verband hou met 'n ander getal; presiese eweredigheid. As daar vyf vrouens vir elke vier mans is, is die verhouding van vrouens tot mans 5:4, geskryf met 'n dubbelpunt (:). Hierdie verhouding kan voorgestel word as 'n breuk $\frac{5}{4}$ of $1\frac{1}{4}$ of 1,25; of ons kan sê dat daar 25% meer vrouens as mans is.
Verskil	(s.nw.) Wiskunde: aftrekking. Informeel: 'n ongelykheid. Hoe dinge nie dieselfde is nie.
Verspreiding	(s.nw.) Hoe iets uitgesprei word. Wiskunde: die omvang en verskeidenheid getalle soos op 'n grafiek aangedui.
Vervang	(ww.) In die plek stel.
Vervanging	(s.nw.) Die proses van vervanging. Wiskunde: om 'n algebraïese simbool in 'n formule met 'n bekende waarde of ander formule te vervang, om die berekening te vereenvoudig. Sien vereenvoudig.
Vierhoek	(s.nw.) 'n Vorm met vier sye.
Vierkant	(s.nw.) Wiskunde: 'n vorm of figuur met vier gelyke sye en slegs regte hoeke.
Vlak	(s.nw.) 'n Plat oppervlak.
Voetskrif	(s.nw.) 'n Getal wat onder die res van die lyn geskryf word, bv. CO_2.

Volume	(s.nw.) 'n Mate van die ruimte wat 'n voorwerp opneem, gelyk aan lengte x breedte x hoogte.
Vooroordeel	(s.nw.) Om geneig te wees om teen iets te wees of gewoonlik onregverdiglik teen iets; om nie akkuraat verslag te doen oor iets nie; om iets buitensporig te begunstig.
Voorspel	(ww.) Algemene gebruik: om vooruit te sien. Fisiese Wetenskappe: om te sê wat gaan gebeur, gebaseer op 'n wet. Sien wet.
W	
Waardever-sameling	(s.nw.) Die versameling waardes wat aan 'n funksie verskaf kan word. Die versameling moontlike y-waardes in 'n grafiek. Sien definisieversameling.
Waarskynlik	(adj.) Om moontlik te wees; iets wat dalk mag gebeur.
Waarskynlik-heid	(s.nw.) Hoe waarskynlik iets is. Sien waarskynlik. Waarskynlikheid is oor die algemeen 'n wiskundige mate wat as 'n desimale getal gegee word, bv. [0] beteken onwaarskynlik, maar [0,5] beteken net so waarskynlik as onwaarskynlik. [0,3] is onwaarskynlik en [0.7] is heel waarskynlik. Die mees algemene manier om waarskynlikheid uit te druk is as 'n frekwensie of hoe dikwels iets voorkom. Bv. dit is $\frac{1}{13}$ of 0,077 waarskynlik om 'n aas te trek, want daar is 4 ase in 'n pak kaarte van 52 kaarte.
Wet	(s.nw.) 'n Formule of steling, afgelei (ontdek) uit vorige aksiomas (waarhede), word gebruik om 'n resultaat te voorspel.
Wortelvorm	(s.nw.) 'n Irrasionale wortel (bv. $\sqrt{2}$).

Die wiskunde wat jy nodig het

Hierdie afdeling gee vir jou die basiese wiskundevaardighede wat jy nodig het om enige vak te slaag waarin wiskunde gebruik word. Moenie verder gaan met die inhoud van hierdie boek voordat jy nie eers hierdie afdeling bemeester het nie.

1. Basiese wenke

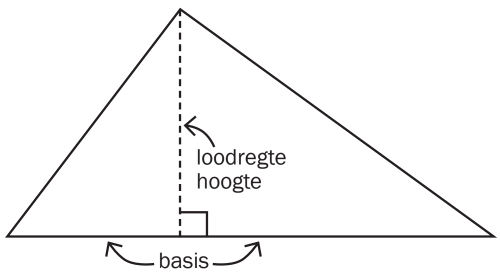
- As 'n formule nie 'n maalteken (×) of 'n punt-produk (·) het nie, en daar staan wel twee simbole langs mekaar, beteken dit "maal". Dus, m_1m_2 beteken massa 1 maal massa 2. Jy kan dit ook skryf as $m_1 \times m_2$ of m_1m_2
- 'n Komma beteken dieselfde as die desimale punt op jou sakrekenaar (d.i 4,5 = 4.5) Moenie die desimale punt met die punt-produk (vermenigvuldig) verwar nie: 4.5 = 4½ maar 4·5 = 20. Vermy dit daarom eerder om die punt-produk te gebruik.
- 'n Veranderlike is iets wat varieer (verander). Byvoorbeeld, die weer is 'n veranderlike in 'n besluit om winkels toe te gaan of nie. Veranderlikes in wetenskap en wiskunde word voorgestel met letters, wat soms algebraïese veranderlikes genoem word. Die mees algemene veranderlike wat jy in wiskunde sien is x, en waarskynlik gevolg deur y, z

2. Onderwerp van 'n formule of los op vir

Jy moet dikwels in wiskunde "iets die onderwerp van 'n formule" maak of "iets oplos". Dit verwys daarna om die waarde van 'n onbekende hoeveelheid te bepaal wanneer ander hoeveelhede en 'n formule gegee word wat die verwantskap tussen hulle aantoon.

Die woord "formule" beteken 'n reël om iets uit te werk. Ons werk met formules om grafieke te trek en ook om waardes soos oppervlakte, omtrek en volume te bereken. Gewoonlik kry jy die formules in 'n eksamenvraag, jy hoef dit dus nie te onthou nie, maar jy moet die korrekte getalle kies om in die formule te sit (vervang). Byvoorbeeld, die formule vir die oppervlakte van 'n driehoek is

$Oppervlakte = \frac{1}{2}\, basis \times hoogte$.



In hierdie formule:

- staan die woord *Oppervlakte* vir die grootte van die oppervlakte van 'n driehoek (die hele oppervlak wat die driehoek bedek)
- staan die woord *basis* vir die lengte van die basis van die driehoek
- staan die woord *hoogte* vir die lengte van die loodregte hoogte van die driehoek

'n Formule kan met letters in plaas van woorde geskryf word, byvoorbeeld:
$A = \frac{1}{2} b \times h$.

Die hoeveelheid op sy eie aan die linkerkant word die onderwerp van die formule genoem.

bv. 1

As John 5 appels het, en hy gee 'n paar vir Johanna, en hy het twee appels oor, hoeveel appels het hy vir Johanna gegee? Die formule kan iets wees soos: $5 - x = 2$

Om vir x op te los, moet ons die x en die 2 omruil. Wat ons in werklikheid doen, is om "x" aan albei kante by te tel:

$5 - x + x = 2 + x$

Dit word: $5 = 2 + x$

Dan trek ons 2 aan albei kante af om die 2 oor te skuif:

$5 - 2 = 2 - 2 + x$

$5 - 2 = x$

$3 = x$ ... dus gee John vir Johanna drie appels.

Dieselfde prosedure is van toepassing ongeag hoe moeilik die formule lyk. Al wat jy doen is om regdeur op te tel, af te trek, te kwadreer, die vierkantswortel te trek, te vermenigvuldig of te deel om hierdie items rond te skuif.

bv. 2

Kom ons vat 'n voorbeeld uit Fisiese Wetenskappe: V = IR. Dit beteken, die spanning in 'n stroombaan is gelyk aan die stroom in die stroombaan maal met die weerstand.

Veronderstel ons weet die spanning is 12 V, en die weerstand is 3 Ω. Wat is die stroom?

$V = IR$

$12 = 3 \times I$

Deel regdeur deur 3 om die I te isoleer

$\frac{12}{3} = \left(\frac{12}{3}\right) I$

Onthou dat enigiets gedeel deur homself is 1, dus:

$\frac{12}{3} = (1) \times I$ ... en $\frac{12}{3} = 4$ ... dus

$4 = I$ of

$I = 4$ A ... Die stroombaan het 'n stroom van 4 ampère.

bv. 3

Hier is 'n moeiliker voorbeeld uit Fisiese Wetenskappe. Gegee

$K_c = 4{,}5$

$[SO_3] = 1{,}5 \text{ mol/dm}^3$

$[SO_2] = 0{,}5 \text{ mol/dm}^3$

$[O_2] = \frac{(x - 48)}{64} \text{ mol/dm}^3$

Los op vir x.

$$K_c = \frac{[SO_3]^2}{[SO_2]^2[O_2]} \qquad \therefore 4{,}5 = \frac{(1{,}5)^2}{(0{,}5)^2 \frac{(x-48)}{64}}$$

$$\therefore x = 176 \text{ g}$$

Hoe het ons by die antwoord uitgekom?

Stap vir Stap

Kom ons kyk hoe dit werk.

Los eerstens die eksponente op:

$$4{,}5 = \frac{2{,}25}{(0{,}25)^{\frac{(x-48)}{64}}}$$

Nou kan ons sien dat 2,25 en 0,25 soortgelyke getalle is (veelvoude van vyf), so kom ons deel hulle soos aangetoon.

$$4{,}5 = \frac{2{,}25}{0{,}25} \times \frac{x-48}{64}$$

Dit laat ons met

$$4{,}5 = 9 \times \frac{(x-48)}{64}$$

Maar as ons deur 'n deler deel, kan daardie tweede deler bokant die lyn geskryf word. Hier is 'n eenvoudige voorbeeld:

$$1 \div (2 \div 3) = \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1 \times 3}{2}$$

$$= \frac{3}{2} = 1{,}5$$

As jy hieroor twyfel, probeer dit vinnig op jou sakrekenaar: 1 ÷ (2 ÷ 3) ... dit beteken, een, gedeel deur twee-derdes. Twee-derdes is 0,6667, wat amper een is. So hoeveel "twee-derdes" het jy nodig om regtig een op te maak? Die antwoord is <u>een en 'n half</u> "twee-derdes" ...
d.i. 0,6667 + (0,6667 ÷ 2) = 1. Gevolglik is die antwoord <u>1,5</u>.

Dus, terug na die oorspronklike probleem, ons kan die 64 bo die lyn skryf en dit met nege vermenigvuldig:

$$4{,}5 = 9 \times \left(\frac{x-48}{64}\right)$$

$$4{,}5 = \frac{9 \times 64}{x-48}$$

$$4{,}5 = \frac{576}{x-48}$$

Nou kan ons die hele vergelyking omkeer om x aan die bokant te kry:

$$\frac{1}{4{,}5} = \frac{x-48}{576}$$

Nou vermenigvuldig ons albei kante met 576 om die 576 uit die onderste ry te kry

$$\frac{576}{4{,}5} = \frac{(x-48)\,\cancel{576}}{\cancel{576}}$$

En ons kanselleer die 576'e aan die regterkant soos hierbo aangedui is.

Nou, as 576 ÷ 4,5 = 128, dan is 128 = x – 48

Nou kan ons 48 aan albei kante bytel om die 48 regdeur te skuif

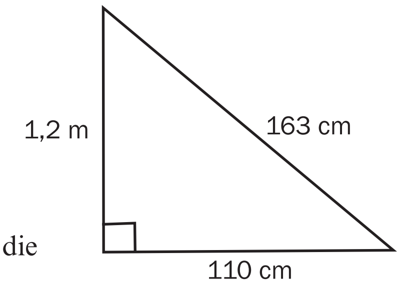
128 + 48 = x – 48 + 48 ... gevolglik, 128 + 48 = x = 176.

bv. 4

'n Driehoek het 'n basis van 6 cm en 'n loodregte hoogte van 2 cm. Bepaal die oppervlakte van die driehoek.

Stap 1: Skryf die waarde neer wat jy moet bepaal.	Moet bepaal: Oppervlakte
Stap 2: Skryf die inligting neer wat jy het. Skryf die getalle en die eenhede neer.	basis = 6 cm hoogte = 2 cm
Stap 3: Skryf die formule neer wat jy gaan gebruik.	Oppervlakte = $\frac{1}{2}$ basis × hoogte
Stap 4: Skryf weer die formule neer, maar skryf die getalle wat jy het in plaas van die woorde of letters neer. NB Ons noem hierdie proses vervanging.	Oppervlakte = $\frac{1}{2}$ × 6 cm × 2 cm
Stap 5: Doen nou die berekening.	= 3 cm × 2 cm
Stap 6: Skryf jou antwoord met die korrekte eenhede neer.	= 6 cm^2

bv. 5



Bereken die oppervlakte en omtrek van die driehoek hier langsaan.

Dit lyk soos 'n maklike probleem, maar jy moet op jou hoede wees. Soos jy die stappe volg, sal jy sien waarom.

Stap 1: Skryf die waarde neer wat jy moet bepaal.	Moet bepaal: Oppervlakte en omtrek. Kom ons begin met oppervlakte
Stap 2: Skryf die inligting neer wat jy het.	Uit die diagram: basis = 110 cm hoogte = 1,2 m Die sye van die driehoek is reghoekig met mekaar, dus is een sy die loodregte hoogte. NB Die eenhede van die twee lengtes is nie dieselfde nie. Skryf altyd die waardes met dieselfde eenhede neer. hoogte = 1,2 m = 120 cm (want 100 cm = 1 m)
Stap 3: Skryf die formule neer.	Oppervlakte = $\frac{1}{2}$ basis × hoogte
Stap 4: Skryf weer die formule neer, maar skryf die getalle wat jy het in plaas van die woorde of letters neer.	Oppervlakte = $\frac{1}{2}$ × 110 cm × 120 cm
Stap 5: Doen nou die berekening.	= 55 cm × 120 cm
Stap 6: Skryf jou antwoord met die korrekte eenhede neer.	= 6 600 cm^2
Stap 7: Bereken die omtrek.	Omtrek = 120 + 163 + 110 = 393 cm

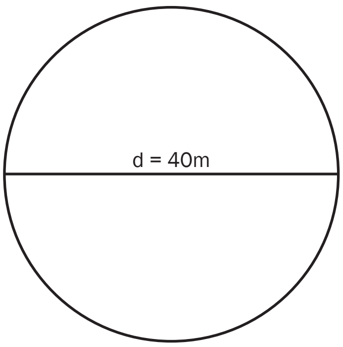
bv. 6

In die Verenigde State gebruik mense grade Fahrenheit om temperatuur te meet. Herlei 67°F na grade Celsius (°C). Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

Die formule om te gebruik is °C = (°F – 32°) ÷ 1,8.

Moet bepaal: Temperatuur in grade Celsius	*Notas*
Inligting wat ons het: Temperatuur in grade Fahrenheit = 67°F	
°C = (67° – 32°) ÷ 1,8	Vervang °F met 67° in die formule: °C = (°F – 32°) ÷ 1,8.
°C = 35° ÷ 1,8	Onthou die volgorde van bewerkings: Bereken eerste die hakies en doen dan die deling.
°C = 19,444 …°	Rond af tot twee desimale plekke.
Temperatuur in grade Celsius = 19,44 °C	Kyk na die getal in die derde desimale plek. Dit is minder as 5, so rond die tweede desimale plek af na onder.

bv. 7



’n Ronde stuk grond het ’n diameter van 40 m. Wat is die oppervlakte van die stuk grond?

Gebruik die formule: A = πr^2 vir die oppervlakte van ’n sirkel en gebruik die waarde van 3,142 vir π.

Moet bepaal: Oppervlakte	Notas
Inligting wat ons het: diameter = 40 m; π = 3,142 Maar ons het die radius nodig, wat die helfte is van die diameter, dus r = 20 m.	NB Maak altyd seker dat jy die kwantiteit gebruik wat in die formule geskryf is – radius, nie diameter nie.
A = πr^2	
A = 3,142 × $(20)^2$	A = πr^2 beteken Oppervlakte = pi maal die kwadraat van die radius
A = 3,142 × (20 × 20) A = 3,142 × 400	
A = 1 256,8 m^2	Is die eenhede reg? Ja, die diameter is in meter gegee, so die oppervlakte sal in vierkante meter wees (m^2)

bv. 8

Wanneer ons met 'n formule werk, wil ons die kwantiteit wat ons bereken op sy eie aan die een kant van die formule hê, sodat dit die onderwerp van die formule is.

Ons kan maklik die oppervlakte bepaal as die formule Oppervlakte = lengte × breedte is. Kom ons gebruik nou dieselfde formule om die lengte te bepaal.

1.	Kyk na die formule. Watter kwantiteit moet jy bereken?	Oppervlakte = lengte × breedte
2	Wat moet jy doen om die lengte op sy eie te kry? Lengte word met die breedte vermenigvuldig. Ons moet deur die breedte deel om die lengte op sy eie te kry. NB Jy kan net iets met 'n formule doen as jy dieselfde aan albei kante doen!	
3.	Deel albei kante deur die breedte:	Oppervlakte ÷ breedte = lengte × breedte ÷ breedte
4.	Vereenvoudig nou die formule: oppervlakte ÷ breedte	= lengte (want: breedte ÷ breedte = 1)
5.	Lengte =	Oppervlakte ÷ breedte
6.	Gebruik die formule om die probleem op te los deur die waardes vir oppervlakte en breedte te vervang.	

bv. 9

Om die wins te bereken wat gemaak word deur 'n item te verkoop, gebruik ons die formule:

Wins = verkoopsprys – kosprys.

Maar, wat doen ons as ons alreeds weet wat die wins en die kosprys is, maar ons moet die verkoopsprys bereken?

'n Voorbeeld: Dit kos R121 om 'n halssnoer teen kosprys te koop en Thabo wil R65 wins maak. Vir hoeveel moet hy dit verkoop? (Wat is die verkoopsprys?)

		Verkoopsprys
1.	Kyk na die formule. Wat is die kwantiteit wat jy wil bereken?	Wins = verkoopsprys – kosprys W = VP – KP
2.	Vervang die waardes wat jy het, d.i. wins en kosprys.	R65 = VP – R121
3.	Tel die kosprys aan albei kante by.	R65 + R121 = VP – R121 + R121
4.	Vereenvoudig nou	R186 = VP (want kosprys – kosprys = 0)

bv. 10

Hierdie voorbeeld bevat 'n breuk. Kyk wat jy in daardie geval moet doen om 'n kwantiteit die onderwerp van die formule te maak.

5 myl is ongeveer dieselfde as 8 kilometer. Die formule om kilometer na myl te herlei is:

Aantal myl = $\frac{5}{8}$ × aantal kilometer.

Gavin het 30 myl met sy fiets gery en hy wil weet hoeveel kilometer dit is. Die formule moet begin met "aantal kilometer = … "

Herrangskik die formule. Kyk dan hoeveel kilometer hy fiets gery het.

1.	Kyk na die formule. Wat is die kwantiteit wat jy moet bereken?	aantal myl = $\frac{5}{8}$ × aantal kilometer
2.	Aantal kilometer word met $\frac{5}{8}$ vermenigvuldig. Ons moet dus met $\frac{8}{5}$ vermenigvuldig want $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} = 1$.	
3.	Vermenigvuldig albei kante met $\frac{8}{5}$.	aantal myl × $\frac{8}{5}$ = $\frac{5}{8}$ × aantal kilometer × $\frac{8}{5}$
4.	Vereenvoudig nou die formule: Skuif die "× $\frac{8}{5}$".	aantal myl × $\frac{8}{5}$ = $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5}$ × aantal kilometer
	Kanselleer uit: $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} = 1$.	aantal myl × $\frac{8}{5}$ = aantal kilometer
5.	Nou het ons die aantal kilometer = aantal myl × $\frac{8}{5}$	
6.	Gebruik die formule om die probleem op te los. Jy kan dit hoofrekene doen: 30 × 8 = 240 240 ÷ 5 = 48 Of jy kan `n sakrekenaar gebruik 30 [×] 8 [÷] 5 [=]	aantal kilometer = aantal myl × $\frac{8}{5}$ aantal kilometer = 30 × $\frac{8}{5}$ = 48 km Gavin het 48 km ver fiets gery.

bv. 11

Thami moet 'n sirkel maak met 'n oppervlakte van 40 cm^2. Wat moet die radius van die sirkel wees? Onthou om jou antwoord af te rond tot twee desimale plekke.

Die formule van die oppervlakte van 'n sirkel is $A = \pi r^2$. Gebruik die waarde van 3,142 vir π.

1.	Kyk na die formule. Wat is die kwantiteit wat jy wil bereken?	$A = \pi r^2$
2.	Wat moet jy doen om die radius alleen aan die een kant van die vergelyking te kry? Daar is twee dinge: • die radius word eers gekwadreer • dan word dit met pi (π) vermenigvuldig.	
3.	Deel albei kante deur π	$Oppervlakte \div \pi = \pi r^2 \div \pi$
4.	Ons het dan Wat ons kan skryf as:	$Oppervlakte \div \pi = r^2$ $\frac{oppervlakte}{\pi} = r^2$
	Nou kan ons die vierkantswortel van albei kante kry.	$\sqrt{\frac{Oppervlakte}{\pi}} = \sqrt{r^2}$
5.	Nou het ons $r = \sqrt{\frac{Oppervlakte}{\pi}}$	
6.	Gebruik die formule om die probleem op te los deur die gegewe waardes te vervang. Om dit op jou sakrekenaar te doen, druk eers 40 ÷ 3,142 = Druk dan √ Rond af tot twee desimale plekke.	$r = \sqrt{\frac{Oppervlakte}{\pi}}$ $r = \sqrt{\frac{40}{3{,}142}} = 3{,}568 \ldots$ r = 3,57 cm Sy moet `n sirkel maak met `n radius van 3,57 cm.

3. Statistiek

Jy moet ten minste die volgende terminologie ken:

Afhanklike veranderlike: Die ding wat voortkom uit die eksperiment, die effek; die resultate.

Onafhanklike veranderlike(s): Die dinge wat optree as inset tot die eksperiment, die potensiële oorsake. Ook genoem die beheerde veranderlike.

Beheerveranderlike: 'n Veranderlike wat konstant gehou kan word om die verwantkap tussen twee ander veranderlikes te ontdek. "Beheerveranderlike" moenie verwar word met "beheerde veranderlike" nie.

Korrelasie beteken nie veroorsaking nie. Dit is, as twee veranderlikes lyk asof dit verband hou met mekaar (dit lyk of hulle korreleer), beteken dit nie dat een die ander veroorsaak nie. 'n Veranderlike veroorsaak slegs 'n ander veranderlike as een van die veranderlikes 'n funksie $f(x)$ is van die ander. Ons sal meer hieroor sien wanneer ons na die grafieke kyk.

Gemiddelde: Die gemiddeld. In die reeks 1, 3, 5, 7, 9, is die gemiddelde gelyk aan 1 + 3 + 5 + 7 + 9 gedeel deur 5, aangesien daar 5 stukkies data is. Die gemiddelde in hierdie geval is 5.

Mediaan: Die data (enkele stukkie data) in die presiese middel van 'n reeks data. In die reeks 1, 3, 5, 7, 9, is die mediaanwaarde gelyk aan 5.

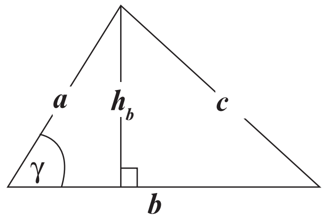
Modus: Die mees algemene stukkie data. In die reeks 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, is 3 die modus.

4. Driehoeke

Die oppervlakte van 'n driehoek is die helfte van die basis maal die hoogte: $a = \frac{b}{2}(h)$. 'n Driehoek met 'n basis van 5 cm en 'n hoogte van 3 cm het 'n oppervlakte van $2{,}5 \times 3 = 7{,}5$ cm^2.

$A = 7{,}5$

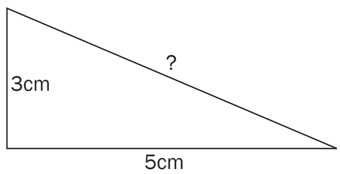
b	Basis	5
h_b	Hoogte	3



Lengtes van die sye van 'n driehoek

Jy kan die lengtes van die sye van reghoekige driehoeke met die Stelling van Pythagoras bereken. Die kwadraat van die skuinssy is gelyk aan die som van die kwadrate van die ander twee sye: In hierdie diagram is b = basis, h_b = hoogte, en c = skuinssy: $c^2 = h_b{}^2 + b^2$.

bv. 12



In die driehoek wat gewys word, kan die skuinssy, wat "?" gemerk is, verkry word deur albei sye te kwadreer en dit op te tel, en dan die vierkantswortel te bepaal om die lengte van die skuinssy te kry. Dit is: $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. Aangesien dit in hierdie geval is dat 34 = skuinssy^2, volg dit dat die vierkantswortel van 34 die waarde van "?" gee, die skuinssy. Dit is 5,83 cm.

5. Trigonometrie

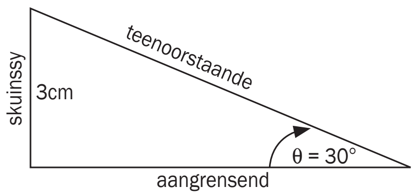
Jy kan trigonometrie gebruik om die groottes van die sye van driehoeke te bereken as jy nie genoeg inligting het nie, bv. jy het nie die groottes van ten minste twee sye nie (maar jy het die hoek)

sin	=	teenoorstaande/skuinssy	sin = T/S
cos	=	aangrensend/skuinssy	cos = A/S
tan	=	teenoorstaande/aangrensend	tan = T/A

Die *skuinssy* is die langste sy langs die hoek, en word gewoonlik voorgestel met theta (θ). "Teenoorstaande" beteken die sy van die driehoek direk teenoor die hoek. "Aangrensend" beteken die sy langs die hoek, wat nie die skuinssy is nie.

bv. 13

In hierdie driehoek is die sy teenoor die hoek θ,3 cm lank. Die sy aangrensend aan die hoek θ, en die skuinssy, is onbekend. Theta, die hoek, is 30 grade.



Hoe bereken ons die skuinssy? Aangesien

$\sin \theta = \frac{T}{S} = 3 \text{ cm} \div S.$
$\sin 30° = 0{,}5$ (jy kan dit met jou sakrekenaar kry, of dit memoriseer).
dus
$0{,}5 = \frac{3}{S}$
en om op te los vir S, vermenigvuldig ons regdeur met S om S die onderwerp van die formule te maak:
$S \times 0{,}5 = 3 \times S \div S$
$S \times 0{,}5 = 3$
nou deel ons deur 0,5 om S alleen te kry:
$S \times 0{,}5 \div 0{,}5 = 3 \div 0{,}5$
$S = 3 \div 0{,}5 \therefore S = 6 \text{ cm}$

Kom ons probeer uitwerk hoe lank die aangrensende sy is, as ons aanneem dat ons nie weet wat die skuinssy is nie.

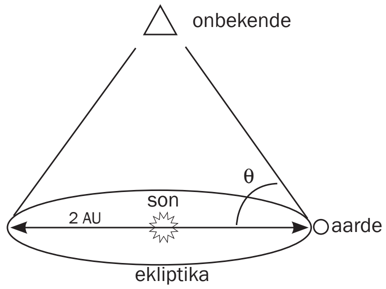
$\tan \theta = \frac{T}{A}$
$\tan 30° = 3 \text{ cm} \div A$
$0{,}57735 = 3 \div A$
$A \times 0{,}57735 = 3 \times A \div A$
$A \times 0{,}57735 = 3$
$A = 3 \div 0{,}57735$
$A = 5{,}196 \text{ cm} \approx 5{,}2 \text{ cm}.$

Kom ons kontroleer dit met Pythagoras. Veronderstel ons wil bewys dat die teenoorstaande sy gelyk is aan 3 cm. Ons het S = 6 en A = 5,2. Dus, Pythagoras sê vir ons $A^2 + T^2 = S^2$. Dus,

$5{,}2^2 + T^2 = 6^2$
$T^2 = 6^2 - 5{,}2^2$
$T^2 = 36 - 27$
$T^2 = 9$
Die vierkantswortel van T^2 sal vir ons T gee ... naamlik, T = 3 cm. Die trigonometriese berekening is korrek.

Laastens is daar drie ander bewerkings wat jy in trigonometrie kan gebruik, maar dit is net die omgekeerdes van die eerste drie: kosekans, sekans en kotangens. Cosec, wat soms afgekort word as csc, is die resiprook (inverse) van sinus. Sec is die inverse van kosinus. En cot is die inverse van tangens. Dit beteken dus dat as sin = T/S, dan is cosec = S/T, en so aan.

bv. 14



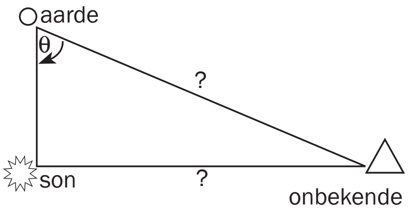
Die Aarde draai om die son op ’n afstand van 149 597 870 700 meter of 149 597 870,7 km (eenhonderd nege-en-veertigmiljoen km). Hierdie afstand word die AU, of die astronomiese eenheid genoem. Die plat skyf wat ooreenstem met die Aarde se wentelbaan word die “ekliptika” genoem. Veronderstel dat op 21 Desember word ’n onbekende voorwerp teen ’n hoek van 88° met die ekliptika waargeneem en dat dieselfde voorwerp op 21 Junie teen 92° waargeneem word. Hoe ver is die onbekende voorwerp in die AU?

Stap vir stap

Oplossing

Stap 1. Ignoreer die ekstra inligting. Aangesien die Aarde om die son wentel, is die hoek met die onbekende voorwerp met betrekking tot die Aarde dieselfde in albei gevalle; dit is net dat op een datum, is die Aarde aan die een kant van die onbekende voorwerp, en op die ander datum, is dit aan die ander kant.

Vanuit die hoeke wat gegee word, kan jy sê dat die onbekende voorwerp teen 90° met die son met betrekking tot die Aarde is.



Stap 2. Ons weet wat die hoek met die onbekende voorwerp is, en die afstand na die son toe. Dus, as ons ’n driehoek teken waar die son die regtehoek is, die Aarde aan die bokant van die skuinssy is, en die afstand na die onbekende voorwerp teenoor die son is, kry ons die volgende driehoek

Ons wil dus die skuinssy bepaal. Ons weet dat die hoeke van ’n driehoek saam 180° is, dus is die verskil tussen 88° en die gegewe hoek van 88° gelyk aan 2°. Dit beteken dat die hoek wat die onbekende voorwerp met betrekking tot die aarde maak, 2° is. Dus:

$$\sin = \frac{T}{S}$$

$$\sin 2° = 1 \text{ AU} \div S = 149\,597\,870{,}7 \text{ km} \div S$$

$$0{,}035 = 149\,597\,870{,}7 \text{ km} \div S$$

$$S = 149\,597\,870{,}7 \text{ km} \div 0{,}035$$

$$S = 4\,286\,533\,756{,}4964 \text{ km} = 28{,}6 \text{ AU}$$

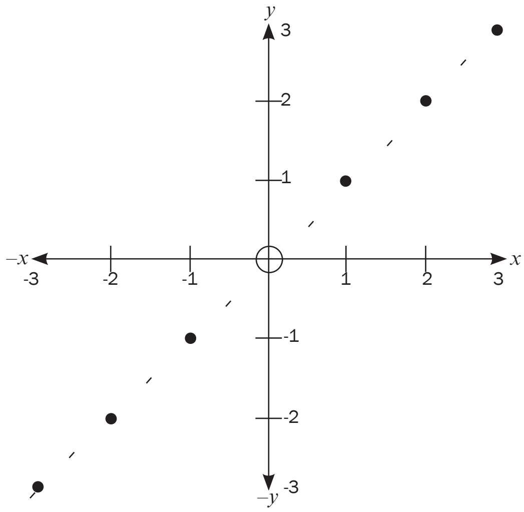
Dit beteken dat die onbekende voorwerp 4,2 miljard km ver is, of 28,6 AU weg is.

6. Grafieke

Dit is waarskynlik die beste om van voor af met Cartesiese koördinate te begin.

“Koördinate” is getalle wat verwys na die afstand van ’n punt op ’n lyn, of op ’n oppervlak, of in die ruimte, vanaf ’n sentrale punt wat die “oorsprong” genoem word. Grafieke wat jy gaan gebruik, het net twee dimensies (rigtings). Die posisies van punte op hierdie grafieke word beskryf met twee koördinate: hoe ver oorkruis (of dwars van links na regs) die punt is, wat die x-koördinaat genoem word, en hoe ver op of af op die bladsy die punt is, wat die y-koördinaat genoem word.

bv. 15



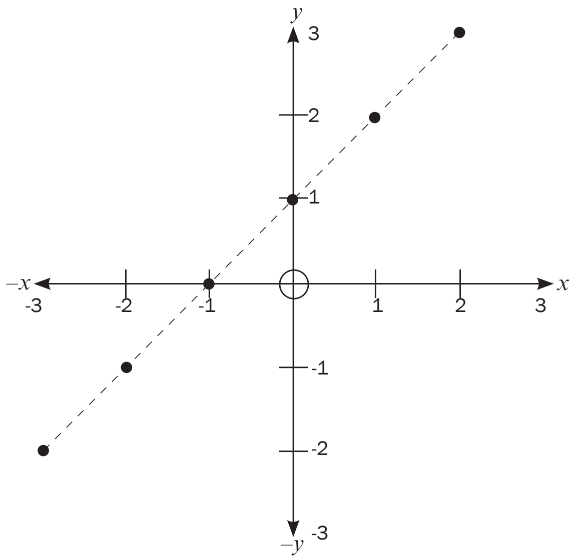
Oorweeg die volgende grafiek. Dit toon ses punte in ’n reguitlyn aan.

Die koördinate wat aangetoon word, kan beskryf word met wat “geordende punte” genoem word. Byvoorbeeld, die verste punt in hierdie grafiek is 3 eenhede dwars op die “x-as” of horisontale lyn. Net so, is dit ook 3 eenhede boontoe op die y-as, of vertikale (op en af) lyn. Die koördinate is dus (3; 3). Die punt net onder die middelpunt of “oorsprong” is een eenheid onder die x-as, en een eenheid links van die y-as. Die koördinate daarvan is dus (-1; 1). Neem kennis dat enigiets links of onder die oorsprong (die sirkel in die middel) ’n minusteken kry.

Dit lyk of hierdie reeks kolle verband hou met mekaar, want hulle lê almal op ’n reguitlyn. As jy ’n resultaat soos hierdie in ’n eksperimentele situasie sien, beteken dit gewoonlik dat jy kan voorspel wat die volgende kol sal wees, naamlik (4; 4) Hierdie soort voorspelling word “ekstrapolasie” genoem. As jy die eksperiment uitvoer, en sien dat die resultaat (4; 4) is, en dan (5; 5), het jy vasgestel dat daar ’n sterk relasie of korrelasie is.

Nog ’n manier om te sê dat x verband hou met y, of dat x eweredig is aan y, is om te sê dat y ’n funksie is van x. Dit word geskryf as $y = f(x)$. In die voorbeeld wat hierbo gegee is, is spanning dus ’n funksie van weerstand. Maar hoe hou y verband met x in hierdie grafiek? Dit lyk asof dit in ’n 1 tot 1 verhouding is: $y = x$. Die formule vir hierdie grafiek is dus $y = x$. In hierdie geval het ons slegs te doen met twee faktore; $y = x$ en y.

bv. 16

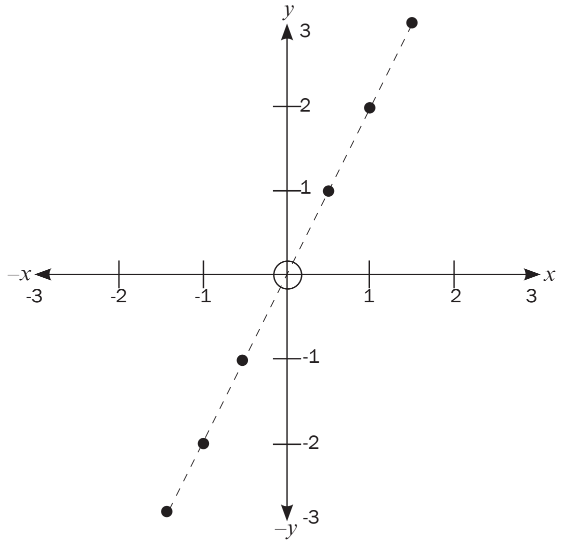


Kom ons kyk nou na ’n effens moeiliker geval wat hier langsaan geïllustreer word.

In die grafiek hier langsaan, kan ons sien dat wanneer ookal x gelyk is aan iets, is y een meer. Volg dus met jou vinger vanaf die linkerkantse onderste kol opwaarts. Dit ontmoet die x-as by die punt –3. Doen dieselfde vir dieselfde punt na die y-as toe. Jy sal sien dit ontmoet die y-as by –2. Jy al sien die volgende koördinate is (–2;–1), dan (–1;0), dan (0;1), (1;2), en uiteindelik (2;3). Hieruit kan ons sien dat wat ookal x is, y sal een meer wees, Dus, $y = x + 1$ is die formule vir hierdie lyn.

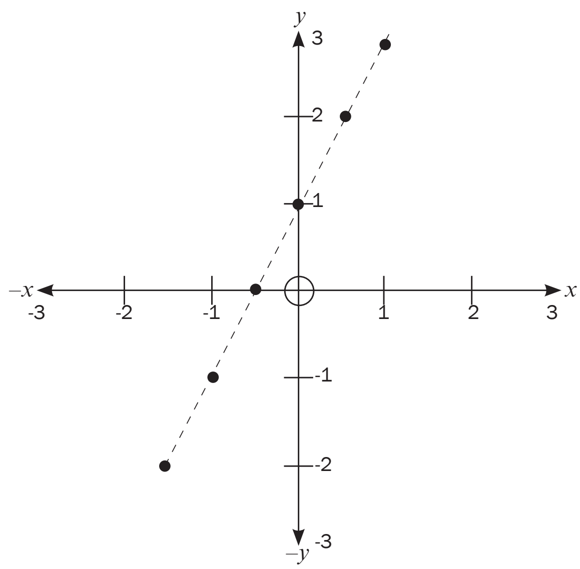
bv. 17

Kom ons kyk na nog ’n geval. In die volgende geval sien ons die volgende waardes: waar x ’n sekere waarde het, is y dubbel daardie waarde. Kom ons tabuleer dit. Wanneer x gelyk is aan 1,5 is y gelyk aan 3, wanneer x gelyk is aan 1, is y gelyk aan 2. Die formule vir hierdie lyn is dus $y = 2x$. Hierdie waarde langs x word die “gradiënt” of “helling” van die lyn genoem. Hoe groter die waarde langs x is, d.i. hoe groter die gradiënt is, hoe steiler is die helling. Die gradiënt word gewoonlik afgekort as “m” wanneer dit onbekend is.



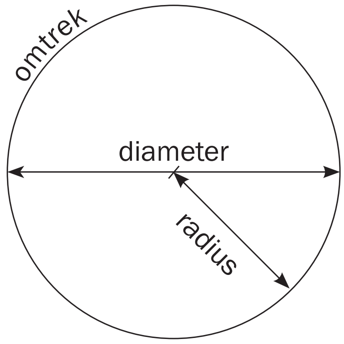
x	y
1,5	3
1	2
0,5	1
0	0
–0,5	–1
–1	–2
–1,5	–3

Kom ons doen nog een geval. In hierdie geval, sien ons dat y 'n funksie is van x, aangesien dit 'n reguitlyngrafiek is. Dit is egter nie so maklik om die verwantskap tussen x en y te sien nie. Ons kan sien dat die helling dieselfde is as die vorige grafiek, so dit moet iets wees soos $y = 2x$. Dit maak egter nie heeltemal sin nie, aangesien 2(–1,5) nie –2 is nie. Ons sien dat waar x gelyk is aan nul (by die oorsprong), is y gelyk aan 1. Maar die helling is dieselfde, so dit moet $y = 2(0) + 1$ wees. Die formule is dus: $y = 2x + 1$.



x	y	$2x + 1$
–1,5	–2	2(–1,5)+1 = –3+1 = –2
–1	–1	2(–1)+1= –2+1 = –1
–0,5	0	2(–0,5)+1 = –1+1 = 0
0	1	2(0)+1 = 0+1 = 1
0,5	2	2(0,5)+1 = 1+1 = 2
1	3	2(1)+1 = 2+1 = 3

7. Sirkels



- Diameter is die wydte van 'n sirkel (2r); radius is die helfte van die diameter (d/2). Die rand van 'n sirkel word die "omtrek" genoem.
  "Diameter" beteken om "dwars te meet". Vergelyk dit met "diagonaal" wat 'n hoeklyn dwars oor 'n veelhoek beteken, dus "dia-" beteken "dwars" (Grieks).
  "Omtrek" beteken om "in 'n sirkel te dra" (Latyn); dink aan hoe die Aarde ons in 'n sirkel of wentelbaan om die son dra. Om die verskil tussen hierdie dinge te onthou, kan jy net onthou dat die son se strale in elke rigting vanaf die son uitstraal, so die radius is die afstand vanaf die middelpunt van 'n sirkel, bv. die son, na die buitekant van 'n sirkel om dit, bv. die Aarde se wentelbaan (die omtrek).
- Oppervlakte van 'n sirkel = πr^2
- Omtrek = $2 \pi r$

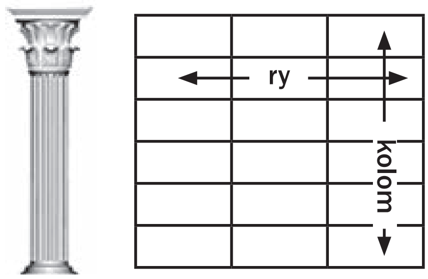
Jy kan die bogenoemde gebruik om die radius of diameter te bepaal.

8. Lees van tabelle

`n Ry loop dwarsoor.
`n Kolom in `n gebou is regop.

8.1 Lees van tabelle

'n Tabel is 'n manier om inligting in rye en kolomme aan te toon.



Kry inligting uit tabelle

Om 'n tabel te lees beteken om inligting in die selle te kry. Elke blok in 'n tabel word 'n sel genoem. Om 'n tabel te lees is soos om 'n rooster te lees.

Kyk na die tabel aan die regterkant.

A en B is die kolomopskrifte

1, 2, 3, 4 en 5 is die ry-opskrifte.

- Wat is in A2? Gaan dwarsoor na kolom A en lees af tot by ry 2.
- 'n Klok
- Wat is in B3? 'n Hand.
- Gee die ry en kolom vir die ster. Ry 4 en kolom A. Jy kan ook A4 skryf.
- Gee die ry en kolom vir die horlosie. Ry 5 en kolom B. Jy kan ook B5 skryf.

	A	**B**
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

bv. **18**

Kyk na die tabel op die volgende bladsy. In 'n vraag moet jy dalk inligting in die tabel soek en dit neerskryf, of jy moet die inligting in die tabel gebruik om 'n berekening te doen.

Die tabel op die volgende bladsy toon die gemiddelde maksimum- en minimumtemperature in Mauritius (gemeet in grade Celsius) vir elke maand aan.

Gemiddelde maandelikse maksimum- en minimumtemperature in Mauritius

Maand van die jaar	Gemiddelde maksimumtemperatuur °C	Gemiddelde minimumtemperatuur °C
Januarie	35	24
Februarie	30	22
Maart	30	21
April	29	21
Mei	25	19
Junie	24	17
Julie	26	18
Augustus	27	19
September	29	20
Oktober	32	22
November	32	22
Desember	34	24

NB

Dit wys dat die gemiddelde maksimumtemperatuur in April 29°C is. Dit wys dat die gemiddelde minimumtemperatuur in November 22°C is.

NB

Die tabel het nie eenhede in die selle nie, maar ons weet wat die eenhede is want dit is in die opskrifte vir elke kolom. Gee altyd die eenheid in jou antwoord.

Kyk na die tabel hierbo en beantwoord hierdie vrae.

1. Watter maand van die jaar het die hoogste gemiddelde maksimumtemperatuur in Mauritius?
2. Watter maand het die laagste gemiddelde maksimumtemperatuur?
3. Wat is die verskil tussen die gemiddelde maksimumtemperatuur in Desember en die gemiddelde minimumtemperatuur in Desember?

NB

Let op! Hier werk ons nog steeds met die kolom vir die **gemiddelde maksimumtemperatuur**.

Oplossing

1. Lees af in die kolom vir die **gemiddelde maksimumtemperatuur** en dan sien jy dat Januarie 'n temperatuur van 35°C het en nie een van die ander temperature hoër is nie.
2. Die laagste maksimumtemperatuur is 24°C in Junie.
3. Hier moet jy die ry vir Desember kry en dan dwarsoor lees om die laagste en hoogste temperature vir daardie maand te kry, en dan die laagste temperatuur van die hoogste temperatuur aftrek om die verskil te kry: 34 – 24 = 10°C.

NB

Die verskil tussen die laagste en hoogste getalle word die **variasiewydte** genoem.

bv. **19**

Die gemiddelde maandelikse verhoging in die koste van elektrisiteit (BTW uitgesluit) tussen 2011 en 2012

	Elektrisiteitsverbruik in kWh			
	50	**150**	**600**	**1 000**
Bedrag betaalbaar in 2011	R27,35	R85,83	R393,67	R728,63
Bedrag betaalbaar in 2012	R28,83	R94,99	R467,43	R888,83
Verhoging tussen 2011 en 2012	R1,48	R9,16	R73,76	R160,20
Persentasie verhoging tussen 2011 en 2012	5,39%	10,67%	18,74%	21,99%

Lees die tabel om die vrae te beantwoord.

1. As 'n huishouding 600 kWh elektrisiteit in 2011 gebruik het, wat moes hulle betaal het?
2. Hoeveel meer sou jy vir 1 000 kWh elektrisiteit in 2012 betaal het in vergelyking met 2011?
3. Wat was die persentasie verhoging vir 150 kWh elektrisiteit tussen 2011 en 2012?
4. Was die persentasie verhoging hoër vir laer elektrisiteitsverbruik of vir hoër elektrisiteitsgebruik?

Oplossing

Wanneer jy 'n vraag soos hierdie beantwoord, moet jy eers mooi na die tabel kyk en 'n paar aantekeninge maak oor wat dit aantoon. Moenie in te veel detail ingaan nie, sorg net dat jy verstaan wat die tabel aantoon.

Die kolomme toon 4 verskillende hoeveelhede elektrisiteitsverbruik aan. Die eenheid is kWh.

	Elektrisiteitsverbruik in kWh			
	50	150	600	1 000
Bedrag betaalbaar in 2011	R27,35	R85,85	R393,67	R728,63
Bedrag betaalbaar in 2012	R28,83	R94,99	R467,43	R888,83
Verhoging tussen 2011 en 2012	R1,48	R9,16	R73,76	R160,20
Persentasie verhoging tussen 2011 en 2012	5,39%	10,67%	18,74%	21,99%

Die eerste ry toon die koste vir 2011 aan en die 2de ry wys die koste vir 2012. Dit is wat die tabel vergelyk.

Hierdie bedrae is vir ons bereken! Hierdie is verskille tussen 2011 en 2012: Bedrag en Persentasie.

Neem kennis dat daar 'n verhoging in koste is in hierdie rigting

1. Lees af met die 2011 ry wat die bedrag aantoon, en die 600 kWh kolom: R393,67.
2. Jy hoef nie 'n berekening te doen nie; hierdie verskil word in die derde ry gegee.
3. Die persentasie verhoging word in die laaste ry gegee. Kyk dus na die laaste ry en tweede kolom (vir 150 kWh): 10,67%
4. In die vierde ry is daar 'n geleidelike verhoging in die persentasie vanaf laer na hoër elektrisiteitsverbruik. Die persentasie verhoging is groter vir hoër verbruik.

NB

Die vraag vra vir die verhoging in die bedrag. Ons stel dus belang in die derde ry. Die verbruik is 1 000 kWh, kyk dus na die 4de kolom en derde ry: R160,20.

8.2 Lees tweerigtingtabelle

Tweerigtingtabelle is 'n nuttige manier om inligting te vertoon, en dit help jou om ontbrekende inligting uit te werk.

Hierdie tabelle toon die getalle van twee kategorieë vir dieselfde steekproef aan. Een kategorie word in die rye aangetoon en die ander kategorie word in die kolomme aangetoon.

NB

Hierdie getalle is vir dieselfde groep leerders.

Byvoorbeeld, die tabel op die volgende bladsy toon aan hoeveel Graad 12-leerders in 'n skool hul eie selfoon het of nie en hoeveel van dieselfde leerders 'n musiekspeler het of nie.

	Besit 'n MP3-speler	Besit nie 'n MP3-speler nie
Besit 'n selfoon	57	21
Besit nie 'n selfoon nie	13	9

Wat interessant is oor hierdie tabel, is dat die totale van albei kolomme en die totale van albei rye dieselfde is. Ons kan sien dat die steekproef uit 100 leerders bestaan het.

	Besit 'n MP3-speler	Besit nie 'n MP3-speler nie	Totaal
Besit 'n selfoon	57	21	78
Besit nie 'n selfoon nie	13	9	22
Totaal	70	30	100

bv. 20

In een maand was 75 van die 180 babatjies wat in 'n hospitaal gebore is, seuntjies en 40 van die babatjies het 4 kg of meer geweeg. Daar was 26 babaseuntjies wat 4 kg of meer geweeg het.

1. Stel hierdie inligting in 'n tweerigtingtabel voor en vul die ontbrekende inligting in.
2. Watter persentasie babadogtertjies het 4 kg of meer geweeg?

Oplossing

1. Teken eers die rooster en vul die inligting in wat gegee is. (Dit maak nie saak of jy die gewig of die geslag in die kolomme of rye aantoon nie.)

	Seuntjies	Dogtertjies	Totaal
Weeg minder as 4 kg			
Weeg 4 kg of meer	26	0	40
Totaal	75		180

Sodra jy die tabel in hierdie vorm het, kan jy die ontbrekende inligting bepaal. Werk terug van die totale af. Byvoorbeeld, as 26 van die babaseuntjies 4 kg of meer geweeg het, dan het 75 – 26 = 49 babaseuntjies minder as 4 kg geweeg.

	Seuntjies	Dogtertjies	Totaal
Weeg minder as 4 kg	49	91	140
Weeg 4 kg of meer	26	14	40
Totaal	75	105	180

2. Daar was 14 babadogtertjies wat 4 kg of meer geweeg het, uit 'n totaal van 105 babadogtertjies.
   $\frac{14}{105} \times 100\% = 13{,}33\%$

bv. 21

Eenhonderd passasiers op ’n busreis is gevra of hulle hoender of beesvleis wil hê en of hulle rys of aartappels wil hê. Uit die 30 passasiers wat rys wou gehad het, wou 20 hoender hê. Daar was 60 passasiers wat hoender gekies het.

1. Stel hierdie inligting in ’n tweerigtingtabel voor en vul die ontbrekende inligting in.
2. Hoeveel maaltye met beesvleis en aartappels moet die busmaatskappy voorberei.

Oplossing

1. Hier is die inligting wat gegee is:

	Hoender	**Beesvleis**	**Totaal**
Rys	20		
Aartappels			
Totaal	60		

Hier is die res van die inligting:

	Hoender	**Beesvleis**	**Totaal**
Rys	20	10	30
Aartappels	40	30	70
Totaal	60	40	100

2. Die busmaatskappy moet 30 maaltye met beesvleis en aartappels voorberei.

Eenheid 1

Eksponente en wortelvorms

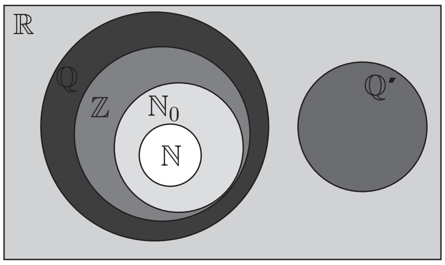
Om eksponente en wortelvorms te verstaan, moet jy die getallestelsel deeglik hersien.

1.1 Die getallestelsel

1.1.1 Reële getalle

Die getalle waarmee ons elke dag werk, word reële getalle genoem.

Die versameling reële getalle met deelversamelings word getoon in die Venndiagram:



1. **Natuurlike getalle**

   $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ (Positiewe telgetalle)

2. **Telgetalle**

   $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \ldots\}$ (Natuurlike getalle en 0)

3. **Heelgetalle**

   $\mathbb{Z} = \{\ldots ;-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

4. **Rasionale getalle**

   - 'n Rasionale getal is 'n reële getal wat in die vorm $\frac{a}{b}$ geskryf kan word, waar $a, b \in \mathbb{Z}$ en $b \neq 0$. Die rasionale getalle sluit al die heelgetalle in.

wenk

Pi (π)is 'n interessante irrasionale getal. Dit is die verhouding van die omtrek tot die diameter van enige sirkel:

$$\pi = \frac{\text{omtrek van sirkel}}{\text{diameter van sirkel}}$$
$$= 3{,}141592653\ \ldots$$

bv. 1 $5; \sqrt{16}; \sqrt[3]{8}; \frac{3}{7}; \frac{-13}{9}; \frac{132}{1}; \frac{22}{7}; \frac{-16}{4}; 3{,}14; 0{,}\dot{3} = \frac{3}{10}; 2{,}\dot{7}\dot{1} = \frac{269}{99}$

LET WEL:
$\frac{22}{7}$ en 3,14 is benaderde rasionale getalle met 'n waarde baie naby aan π.
Dus $\frac{22}{7} \neq \pi$ en $3{,}14 \neq \pi$

5. **Irrasionale getalle**

   - Irrasionale getalle is getalle wat nie as breuke geskryf kan word nie.
   - Alle desimale getalle wat nie eindig of repeteer nie, is irrasionaal.

bv. 2 $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$ pi $(\pi) = 3{,}141592\ldots$

- Hierdie getalle het desimale wat onbepaald (oneindigend) voortgaan sonder 'n patroon.
- Kyk op 'n sakrekenaar na hierdie getalle.
- Die sakrekenaar sal dit afrond. Hulle gaan egter onbepaald voort sonder 'n patroon.
- Die simbool vir die irrasionale getalle is $\mathbb{Q}'$, wat die komplement van $\mathbb{Q}$ of **nie** $\mathbb{Q}$ nie beteken.

6. Reële getalle

Die versameling reële getalle, $\mathbb{R}$, is die versameling van alle rasionale en irrasionale getalle saam.

Ons kan ook skryf $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

bv. 3 $-3; -\sqrt{7}; -1\frac{1}{4}; -1;0; \frac{1}{2}; 1; \sqrt{2}; 2; 3; \pi$

1.1.2 Nie-reële getalle

Die vierkantswortel (of enige ewe wortel) van 'n negatiewe getal, is 'n nie-reële getal.

bv. 4 $\sqrt{-25}$ is 'n nie-reële getal.

$\sqrt[4]{-100}$ is 'n nie-reële getal.

$\sqrt[6]{-120}$ is 'n nie-reële getal.

- Die sakrekenaar sal 'n fout wys (error).

NB

Enige $\frac{\text{getal}}{0}$ = ongedefinieerd. Die sakrekenaar sal ook 'n fout wys (error).

bv. 5 $x^2 + 5x + 9 = 0$

Gebruik die kwadratiese formule om die waardes van x te bepaal:

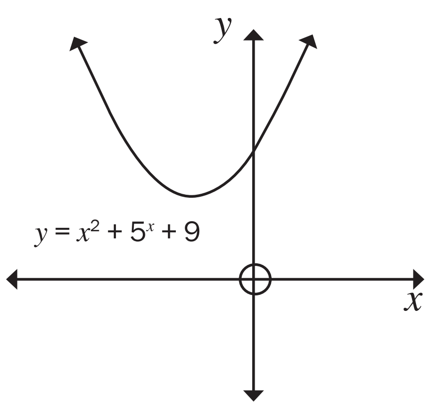
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 36}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$\sqrt{-11}$ is 'n nie-reële getal sodat die waarde van x nie-reël is. Daar is geen reële wortels vir die vergelyking nie, so die grafiek van die funksie $y = x^2 + 5x + 9$ het geen afsnitte met die x-as nie.



Jy sal in Eenheid 2 meer oor die aard van die wortels leer.

1.2 Werk met irrasionale getalle

1.2.1 Wortelvorms

Alle vierkantswortels, derdemagswortels, ens. wat nie rasionaal is nie, word **wortelvorms** genoem.

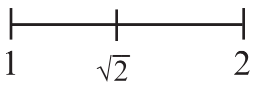
$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$; is almal wortelvorms.

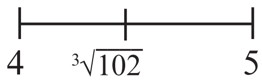
Wortelvorms is reële getalle wat nie-repeterend en oneindigend is wanneer dit as desimale uitgedruk word.

Ons kan uitwerk waar 'n wortelvorm tussen twee heelgetalle op 'n getallelyn lê.

bv. 6 $\sqrt{1} = 1$ en $\sqrt{4} = 2$, dus $\sqrt{2}$ lê êrens tussen 1 en 2.
$\sqrt[3]{64} = 4$ en $\sqrt[3]{125} = 5$, dus $\sqrt[3]{102}$ lê êrens tussen 4 en 5.

Ons kan hulle benaderde posisies op die getallelyn aantoon:





Party wortels of radikale getalle is rasionaal en is nie wortelvorms nie:

bv. 7 Voorbeelde van wortels wat nie wortelvorms is nie, sluit in:
$\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$

1.2.2 Vereenvoudig wortelvorms

bv. 8

1. $\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$ ✓ (1)

2. $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$ ✓ (1)

3. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$ ✓✓ (2)

4. $\sqrt{a^2 - b^2}$ kan nie vereenvoudig word nie

5. $\sqrt[3]{27^4} = \sqrt[3]{(3^3)^4} = \sqrt[3]{3^{12}}$ ✓ $= 3^{\frac{12}{3}} = 3^4 = 81$ ✓ (2)

6. $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ ✓ (1)

7. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ ✓ (1)

wenk $\sqrt{9 + 16} \neq 3 + 4$

Aktiwiteit 1

Skryf in die eenvoudigste vorm sonder om 'n sakrekenaar te gebruik (wys al jou bewerkings).

1. $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$

2. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2}$

3. $\frac{9 + \sqrt{45}}{3}$

4. $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$

[10]

Oplossings

1. $\sqrt{8} \times \sqrt{8} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$ ✓ (1)

2. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \times 2}$ ✓ $= \sqrt[3]{8} = 2$ ✓ (2)

3. $\frac{9+\sqrt{45}}{3} = \frac{9+3\sqrt{5}}{3}$ ✓ $= \frac{3(3+\sqrt{5})}{3}$ ✓ $= 3 + \sqrt{5}$ ✓ (3)

4. $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$

$= 2 \times 2 - \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ ✓ $= 4 - 5 = -1$ ✓ (2)

Of vermenigvuldig die hakies:

$(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 4 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}.\sqrt{5}$ ✓ $= 4 - 5 = -1$ ✓ (2)

[10]

1.2.3 Rasionaliseer 'n noemer

Wanneer ’n breuk ’n wortelvorm in die noemer het, kan jy die noemer na ’n rasionale getal verander. Dit word “rasionalisering van ’n noemer” genoem.

As jy die teller en die noemer met dieselfde wortelvorm vermenigvuldig, verander jy nie die waarde van die getal nie. Jy vermenigvuldig met 1 (d.i. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$) om die voorkoms van die getal te verander, nie sy waarde nie. Daardeur kry jy ’n rasionale noemer.

bv. 9

Rasionaliseer die noemer van $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \checkmark \qquad (1)$$

Nou is die noemer 'n rasionale waarde.

Kontroleer met 'n sakrekenaar: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = 1{,}2247\ldots$

bv. 10

$\frac{3}{\sqrt{3} - 1}$ (het 'n irrasionale getal in die noemer)

$= \frac{3}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$ ✓ (vermenigvuldig met $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$, aangesien $1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$)

$= \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1}$ (let op hoe die terme in die wortelvorm kanselleer)

$= \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}$ ✓ (2) (nou is die noemer rasionaal)

wenk

As die noemer $\sqrt{3} - 1$, is, vermenigvuldig met $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$. Dit sal vir ons die verskil van twee vierkante gee.

Aktiwiteit 2 Interpreteer 'n grafiek

1. Voltooi die tabel vir elke getal deur die korrekte kolomme te merk.

	Nie-reële getal	Reële getal $\mathbb{R}$	Rasionale getal $\mathbb{Q}$	Irrasionale getal $\mathbb{Q}'$	Heelgetal $\mathbb{Z}$	Telgetal $\mathbb{N}_0$	Natuurlike getal $\mathbb{N}$
a) 13							
b) 5,121212…							
c) $\sqrt{-6}$							
d) 3π							
e) $\frac{0}{9} = 0$							
f) $\sqrt{17}$							
g) $\sqrt[3]{64} = 4$							
h) $\frac{22}{7}$							

(23)

2. Watter van die volgende getalle is rasionaal en watter is irrasionaal?

a) $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{8}$ **c)** $\sqrt{\frac{9}{4}}$ **d)** $\sqrt{6\frac{1}{4}}$

e) $\sqrt{47}$ **f)** $\frac{22}{7}$ **g)** 0,347347… **h)** $\pi - (-2)$

i) $2 + \sqrt{2}$ **j)** 1,121221222… (10)

[33]

Oplossings

1.	Nie-reële getal	Reële getal $\mathbb{R}$	Rasionale getal $\mathbb{Q}$	Irrasionale getal $\mathbb{Q}'$	Heelgetal $\mathbb{Z}$	Telgetal $\mathbb{N}_0$	Natuurlike getal $\mathbb{N}$	
a) 13		✓	✓		✓	✓	✓	(5)
b) 5,121212…		✓	✓					(2)
c) $\sqrt{-6}$	✓							(1)
d) 3π		✓		✓				(2)
e) $\frac{0}{9} = 0$		✓	✓		✓	✓		(4)
f) $\sqrt{17}$		✓		✓				(2)
g) $\sqrt[3]{64} = 4$		✓	✓		✓	✓	✓	(5)
h) $\frac{22}{7}$		✓	✓					(2)

2. a) $\sqrt{16} = 4$ (rasionaal) ✓ (1) **b)** $\sqrt{8}$ (irrasionaal) ✓ (1)

c) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ (rasionaal) ✓ (1) **d)** $\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ (rasionaal) ✓ (1)

e) $\sqrt{47}$(irrasionaal) ✓ (1) **f)** $\frac{22}{7}$(rasionaal) ✓ (1)

g) 0,347347… (rasionaal, want dit is 'n repeterende desimaal) ✓ (1)

h) $\pi - (-2)$ (irrasionaal, want π is irrasionaal) ✓ (1)

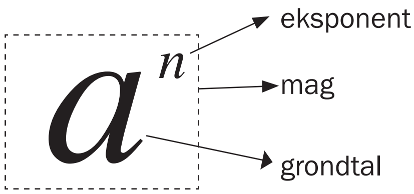
i) $2 + \sqrt{2}$ (irrasionaal want $\sqrt{2}$ is irrasionaal) ✓ (1)

j) 1,121221222… (irrasionaal, want dit is 'n nie-repeterende en oneindige desimaal) ✓ (1)

[33]

1.3 Eksponente

Die **eksponent** van 'n getal sê vir ons hoeveel keer om die getal (die **grondtal**) met homself te vermenigvuldig.



Dus $a^2 = a \times a$ $\quad a^3 = a \times a \times a$

$a^n = a \times a \times a \times \ldots$ n keer

bv. 11

3^4 word gelees as: drie tot die mag 4, of 3 eksponent 4 wat gelyk is aan $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

1.3.1 Eksponentwette

Hierdie wette geld vir eksponente wat heelgetalle, rasionale getalle of irrasionale getalle is.

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ Om twee magte met dieselfde grondtalle te vermenigvuldig, tel die eksponente op.	$a^5 \times a^3 = a^{5+3} = a^8$ $3^5 \times 3^3 = 3^{5+3} = 3^8$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ Om twee magte met dieselfde grondtalle te deel, trek die eksponente af.	$a^8 \div a^2 = a^{8-2} = a^6$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$ Om 'n eksponent tot 'n mag te verhef, vermenigvuldig die eksponente. $(ab)^m = (a^m b^m)$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$(a^4)^3 = a^{4 \times 3} = a^{12}$ $(a^2 \times b^3)^5 = a^{2 \times 5} . b^{3 \times 5} = a^{10} . b^{15}$ $(a^5/b^2)^3 = \frac{a^{5 \times 3}}{b^{2 \times 3}} = \frac{a^{15}}{b^6}$
4. $a^0 = 1$, Enige grondtal verhef tot 0 is 1	$(b)^0 = 1$; $\quad (3)^0 = 1$; $\quad (5a^2b^3)^0 = 1$
5. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ 'n Positiewe eksponent in die noemer is dieselfde as 'n negatiewe eksponent in die teller. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$	$b^{-3} = \frac{1}{b^3}$ $b^3 = \frac{1}{b^{-3}}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ $\quad$ (n ≥ 2). Om die wortel van 'n mag te bepaal, deel die eksponente.	$\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = (2^1)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a^1} = (a^1)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

1.3.2 Algebraïese uitdrukkings met eksponente

Onthou om in hierdie volgorde te werk:

tekens → waardes → veranderlikes

	Waardes	**Veranderlikes**	**Antwoord**
a) $-3a^3b^2 \times -4a^4b^4$	$-3 \times -4 = 12$	$a^3b^2 \times a^4b^4 = a^7b^6$	$= +12a^7b^6$
b) $12x^5y^8 \div -4x^2y^4$	$12 \div -4 = -3$	$x^5y^8 \div x^2y^4 = x^3.y^4$	$= -3x^3y^4$
c) $(-3a^3b^2)^3$	$(-3)^3 = -27$	$(a^3b^2)^3 = a^9b^6$	$= -27a^9b^6$
d) $\sqrt[4]{16a^{16}}$	$\sqrt[4]{16} = 2$ $(2^4 = 16)$	$\sqrt[4]{a^{16}} = \text{a}^4$	$= 2a^4$

Waar nodig, werk ons die binneste hakies eerste uit en volg die volgorde van **HVDMOA H**akies/**V**an, **D**eel/**M**aal/**O**ptel/**A**ftrek

Aktiwiteit 3

Bereken

a) $-3\left((-2a^3)^2 + \sqrt{9a^{12}}\right)$ $\qquad \sqrt{9a^{12}} = (3^2a^{12})^{\frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{5(2a^4)^3}{(-5a^3)^2 - 5a^6}$ **[5]**

Oplossings

a) $-3\left((-2a^3)^2 + \sqrt{9a^{12}}\right)$ vereenvoudig eksponente binne die hakies en die vierkantswortel

$= -3(4a^6 ✓ + 3a^6 ✓)$ tel gelyksoortige terme in die hakie bymekaar

$= -3\,(7a^6) = -21a^6$ ✓ vereenvoudig (3)

b) $\dfrac{5(2a^4)^3}{(-5a^3)^2 - 5a^6}$ vereenvoudig eers die hakies bo en onder die lyn

$= \dfrac{5(8a^{12})}{+25a^6 - 5a^6}$ ✓ $= \dfrac{40a^{12}}{20a^6} = 2\text{a}^6$ ✓ (2)

[5]

1.3.3 Priemfaktore

Wanneer die grondtalle verskil, kan ons elke grondtal as 'n produk van die priemfaktore skryf.

Onthou: 'n Priemgetal het slegs twee verskillende faktore.

'n Saamgestelde getal het meer as twee faktore.

Die getal 1 is nie 'n priemgetal nie en ook nie 'n saamgestelde getal nie.

Priemgetalle: 2; 3; 5; 7; 11; 13 …

Elke **saamgestelde getal** kan as **die produk van priemgetalle geskryf word.**

Dit help ons om te faktoriseer en te vereenvoudig.

wenk

2^2	2	2 700
	2	1 350
3^3	3	675
	3	225
	3	75
5^2	5	25
	5	5

bv. 12

$4 = 2^2$; $6 = 2 \times 3$; $8 = 2^3$; $9 = 3^2$; $10 = 2 \times 5$; $12 = 2^2 \times 3$

$24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$

LET WEL:

Om die faktore van 2 700 te bepaal, deel dit deur die kleinste priemgetal wat 'n faktor is, bv. 2; gaan dan voort met 3; dan 5 ens.

$2\,700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$ ✓

Vind uit hoe jou wetenskaplike sakrekenaar die priemfaktore van 'n getal vir jou kan bereken.

wenk

	2	72
2^3	2	36
	2	18
3^2	3	9
	3	3
		1

bv. 13

Druk 72^{x-2} in priemfaktore uit

$$72^{x-2} = (2^3.3^2✓)^{x-2}$$
$$= 2^{3(x-2)}.3^{2(x-2)}$$
$$= 2^{3x-6}.3^{2x-4} ✓$$

1.3.4 Werk met negatiewe eksponente

Dit is makliker om antwoorde met positiewe eksponente te skryf, so ons gebruik die eksponentwet:

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ en $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

Dit beteken ook dat $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$

Aktiwiteit 4

Vereenvoudig die volgende. Skryf antwoorde met positiewe eksponente waar nodig.

1. $\frac{a^{-3}}{b^{-2}}$ **2.** $\frac{4a^7b^{-4}c^{-1}}{d^{-2}e^5}$ **3.** $x^{-1} + y^{-1}$

[5]

Oplossings

1. $\frac{a^{-3}}{b^{-2}} = \frac{b^2}{a^3}$ ✓ **2.** $\frac{4\,a^7b^{-4}c^{-1}}{d^{-2}e^5} = \frac{4\,a^7d^2}{b^4c^1e^5}$ ✓✓

3. $x^{-1} + y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ✓ $= \frac{y + x}{xy}$ ✓ **[5]**

LET WEL: 'n Wortelvorm word ook 'n radikaal genoem.

1.3.5 Werk met wortelvormtekens

Die eksponentwet $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ($a > 0$; $n \geq 2$), kan gebruik word om sekere uitdrukkings te vereenvoudig.

Aktiwiteit 5

1. Skryf hierdie uitdrukkings oor sonder worteltekens en vereenvoudig indien moontlik.

a) $\sqrt[3]{5}$ **b)** $\sqrt[4]{16}$ **c)** $\sqrt[3]{-32}$

[3]

Oplossing

a) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ ✓ **b)** $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$ ✓

c) $\sqrt[5]{-32} = (-32)^{\frac{1}{5}} = [(\ 2)^5]^{\frac{1}{5}} = -2$ ✓ **[3]**

bv. 14

$\sqrt[3]{-27} = -3$ want $(-3)3 = -27$ $\therefore$ $\sqrt[3]{-27}$ is reël

$\sqrt[4]{-16}$ is nie-reël

1.3.6 Wees op die uitkyk vir hierdie algemene foute!

Korrek	Waarskuwing
1. $2^n . 3^n = 6^n$	$2.3^n \neq 6^n$
2. $3^4 \times 3^5 = 3^9$	$3^4 \times 3^5 \neq 9^9$
3. $4^{10} \div 4^5 = 4^5$	$4^{10} \div 4^5 \neq 4^2$ $4^{10} \div 4^5 \neq 1^5$ $4^{10} \div 4^5 \neq 1^2$
4. $(3\,b)^{n-1} = 3^{n-1} b^n - 1$	$(3\,b)^{n-1} \neq 3.\,b^{n-1}$

5.	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
6.	$\sqrt{16 \times^{16}} = 4x^{8}$	$[\sqrt{16 \times {}^{16}} \neq 4\,x^4\ ]$
7. **8.** **9.**	$\sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \neq a + b$ $3 \times^{-3} = \frac{3}{x^3}$ $(x + y)^{-2} = \frac{1}{(x + y)^2}$	$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ bv. $\sqrt{5^2 - 3^2} \neq 5 - 3 = 2$ want $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ $3x^{-3} \neq \frac{1}{3x^3}$ $(x + y)^{-2} \neq x^{-2} + y^{-2}$

1.3.7 Vereenvoudiging van eksponensiaaluitdrukkings

Aktiwiteit 6

Vereenvoudig die volgende en los die antwoord met positiewe eksponente waar nodig.

$$\frac{(a^4)^{n-1}\,.\,(a^2b)^{-3n}}{(ab)^{-2n}\,.\,b^{-n}}$$

[4]

Oplossing

$$\frac{(a^4)^{n-1}\,.\,(a^2b)^{-3n}}{(ab)^{-2n}\,.\,b^{-n}} = \frac{a^{4n-4}\,.\,a^{-6n}\,.\,b^{-3n}}{a^{-2n}\,.\,b^{-2n}\,.\,b^{-n}} \checkmark \checkmark$$

$$= a^{4n-4-6^{n}+2^{n}}\,.\,b^{-3n+2n+n}$$

$$= a^{-4}\,.\,b^0 \checkmark$$

$$= \frac{1}{a^4}\cdot 1 = \frac{1}{a^4} \checkmark$$

[4]

1.3.8 Algebraïese breuke met eksponente

1. Uitdrukkings met slegs produkte van terme
   - Faktoriseer die terme deur priemfaktore te gebruik.
   - Gebruik eksponentwette.

bv. 15

$$\frac{5^{2n}\,.\,9^{2n-3}}{15^{2n}.\,3^{4n-1}} = \frac{5^{2n}\,.\,(3^2)^{2n-3}}{(5.3)^{2n}.\,3^{2n-1}} \checkmark$$ (gebruik priemgetalgrondtalle)

$$= \frac{5^{2n}\,.\,3^{4n-6}}{5^{2n}.\,3^{2n}.\,3^{2n-1}} \checkmark \checkmark$$ (om hakies te verwyder, × eksponente)

$$= 5^{2n-2n}\,.\,3^{4n-6-2n-(2n-1)} \checkmark$$ (dieselfde grondtalle × / ÷ , tel eksponente op of trek af)

$$= 5^0\,.\,3^{4n-6-2n-2n+1}$$

$$= 1\,.\,3^{-5} = 1 \times \frac{1}{3^5}$$ (skryf negatiewe eksponent as positiewe eksponent)

$$= \frac{1}{243} \checkmark$$

2. Uitdrukkings waar terme opgetel of afgetrek word
   - Probeer eers die teller sowel as die noemer faktoriseer.
   - Gebruik eksponentwette.
   - Kanselleer enige gemeenskaplike faktore.

bv. 16

$$\frac{(3^n)^2 + 3^{2n-1}}{9^n} = 3^{2n} + \frac{3^{2n}.3^{-1}}{3^{2n}}$$

$$= \frac{3^{2n}(1 + 3^{-1})}{3^{2n}} \checkmark\checkmark \qquad \text{(faktoriseer: haal GGF uit)}$$

$$= 1\tfrac{1}{3} = \frac{4}{3} \checkmark$$

Aktiwiteit 7

Vereenvoudig die volgende en gee antwoorde met positiewe eksponente waar nodig:

1. $\frac{27^{3-2x}.\ 9^{x-1}}{81^{2-x}}$
2. $\frac{6.5^{x+1} - 2.5^{x+2}}{5^{x+3}}$
3. $\frac{2^{2009} - 2^{2012}}{2^{2010}}$ **[13]**

Oplossings

1. $\frac{27^{3-2x}.\ 9^{x-1}}{81^{2-x}} = \frac{(3^3)^{3-2x}.\ (3^2)^{x-1}}{(3^4)^{2-x}} = \frac{3^{9-6x}.3^{2x-2}}{3^{8-4x}} \checkmark\checkmark$

$= 3^{9-6x+2x-2-8+4x} \checkmark$

$= 3^{-1} = \frac{1}{3} \checkmark$ (4)

2. $\frac{6.5^{x+1} - 2.5^{x+2}}{5^{x+3}} = \frac{6.5^x.5^1 - 2.5^x.5^2}{5^x.5^3}$

$= \frac{5^x(6 \times 5 - 2 \times 5^2)}{5^x.5^3} \checkmark\checkmark$

$= \frac{30-50}{125} \checkmark = \frac{-20}{125} = -\frac{4}{25} \checkmark$ (4)

3. $\frac{2^{2009} - 2^{2012}}{2^{2010}} = \frac{2^{2009}(1 - 2^3)}{2^{2010}} \checkmark\checkmark = \frac{(2^{2009}1 - 8)}{2^{2010}}$

$= \frac{2^{2009}(-7)}{2^{2010}}$

$= 2^{2009-2010} \checkmark_{\times -7}$

$= 2^{-1} \times -7 \checkmark = \frac{1}{2} \times -7 = -\frac{7}{2} \checkmark$ (5)

[13]

1.4 Eksponensiaalvergelykings

Los vergelykings op waar x deel is van die eksponent:

- Skryf die magte as produkte van priemfaktore.
- Probeer EEN mag met dieselfde grondtal aan elke kant van die vergelyking kry.
- Stel die eksponente gelyk.
- Los op vir x.

bv. 17

1. Los op vir x

$2^x = 8$ — skryf 8 as 'n mag van 2

$2^x = 2^3$ — kry dieselfde grondtal aan elke kant

$\therefore x = 3$ ✓ — stel die eksponente gelyk

2. $5^{2x+1} - 125^{2x-3} = 0$ — stel die twee magte gelyk

$5^{2x+1} = 125^{2x-3}$

$5^{2x+1} = (5^3)^{2x-3}$ ✓ — skryf met priemgrondtalle

$5^{2x+1} = 5^{6x-9}$ ✓

$\therefore 2x + 1 = 6x - 9$

$\therefore -4x = -10$

$\therefore x = \frac{5}{2}$ ✓✓✓

3. $2^x = 5^x$

$\therefore \frac{2^x}{5^x} = 1 \qquad \therefore \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$ ✓

$\therefore \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0$ ✓

$\therefore x = 0$ ✓

4. $3^{x+1} - 3^{x-1} = 216$

$\therefore 3^x.3^1 - 3^x.3^{-1} = 216$

$\therefore 3^x(3 - 3^{-1}) = 216$ ✓✓

$\therefore 3^x\left(3 - \frac{1}{3}\right) = 216$

$\therefore 3^x\left(\frac{8}{3}\right) = 216$

$\therefore 3^x = 216 \times \frac{3}{8}$ ✓

$\therefore 3^x = 81$

$\therefore 3^x = 3^4$ ✓ $x = 4$ ✓

5. $3^{2x} - 12.3^x + 27 = 0$

$\therefore 3^x.3^x - 12.3^x + 27 = 0$

> **wenk**
> Onthou:
> $3^x.3^x = 3^{2x}$

Metode 1:

$\therefore 3^x.3^x - 12.3^x + 27 = 0$

$(3^x - 9)(3^x - 3) = 0$ ✓✓

$3^x = 9$ of $3^x = 3$ ✓

$3^x = 3^2$ of $3^x = 3^1$

$\therefore x = 2$ ✓ of $x = 1$ ✓

Metode 2:

$\therefore 3^x.3^x - 12.3^x + 27 = 0$

laat $3^x = k \therefore k.k - 12k + 27 = 0$

$\therefore k^2 - 12k + 27 = 0$ ✓

$(k - 9)(k - 3) = 0$ ✓

$\therefore k = 9$ of $k = 3$ ✓

maar $3^x = k \quad \therefore 3^x = 9$ of $3^x = 3$

$\therefore x = 2$ ✓ of $x = 1$ ✓

[24]

Aktiwiteit 8

Los op vir x:

1. $3(9^{x+3}) = 27^{2x-1}$ **2.** $3^{2x-12} = 1$

3. $2^x = 0{,}125$ **4.** $10^{x(x+1)} = 100$

5. $5^x + 5^{x+1} = 30$ **6.** $5^{2+x} - 5^x = 5^x.23 + 1$

7. $5^x + 15.5^{-x} = 2$ **8.** $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 12 = 0$ **[31]**

Oplossings

Onthou: Wanneer terme opgetel of afgetrek word, moet jy eers faktoriseer:

1. $3\,(9^{x+3}) = 27^{2x-1}$

$3^1(3^2)^{x+3} = (3^3)^{2x-1}$ priemgrondtalle

$3^{1+2x+6} = 3^{6x-3}$ ✓ dieselfde grondtalle

$\therefore 7 + 2x = 6x - 3$ ✓ stel eksponente gelyk

$-4x = -3 - 7$

$x = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$ ✓ (3)

2. $3^{2x-12} = 1$

$3^{2x-12} = 3^0$ ✓ maak dieselfde grondtalle deur $1 = 3^0$

$\therefore 2x - 12 = 0$ ✓ stel eksponente gelyk

$2x = 12$

$x = 6$ ✓ (3)

3. $2^x = 0{,}125$ herlei na 'n gemeenskaplike breuk

$2^x = \frac{125}{1\,000} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$ ✓ vereenvoudig

$2^x = 2^{-3}$ ✓ dieselfde grondtalle

$\therefore x = -3$ ✓ stel eksponente gelyk (3)

4. $10^{x(x+1)} = 100$

$10^{x(x+1)} = 10^2$ dieselfde grondtalle

$\therefore\ x\,(x + 1) = 2$ ✓ stel eksponente gelyk

$x\,2 + x - 2 = 0$ stel kwadratiese vergelyking $= 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$ ✓ faktoriseer die trinoom

$x + 2 = 0$ of $x - 1 = 0$ maak elke faktor = 0

$x = -2$ ✓ $x = 1$ ✓ (4)

5. $5^{2+x} - 5^x = 5^x \cdot 23 + 1$

$5^{2+x} - 5^x - 5^x \cdot 23 = 1$ gelyksoortige terme

$5^{2+x} - 24 \cdot 5^x = 1$ ✓

$5^2.\,5^x - 24 \cdot 5^x = 1$ faktoriseer (gemeenskaplike faktor)

$5^x(\,5^2 - 24\,) = 1$ ✓✓

$5^x(\,1\,) = 1$

$5^x = 5^0\ \therefore x = 0$ ✓ (4)

wenk
Wanneer terme opgetel of afgetrek word, moet jy eers faktoriseer.

wenk
$5^{x+1} = 5^x.\,5$

6. $5^x + 5^{x+1} = 30$

$5^x + 5^x.\,5^1 = 30$ faktoriseer

$5^x(1 + 5^1) = 30$ ✓✓ gemeenskaplike faktor 5^x

$5^x(6) = 30$ ✓ deel 30 deur 6

$5^x = 5$ dieselfde grondtalle

$\therefore x = 1$ ✓ stel eksponente gelyk (4)

wenk
Wanneer terme opgetel of afgetrek word, moet jy eers faktoriseer.

7. $5^x + 15.5^{-x} = 2$

$\therefore 5^x + \frac{15}{5^x} = 2$

$\times 5^x \therefore 5^x.5^x + 5^x.\frac{15}{5^x} = 2.5^x$ ✓

$\therefore 5^x.5^x + 15 = 2.5^x$

$\therefore 5^x.5^x - 2.5^x + 15 = 0$ ✓

$\therefore (5^x - 5)(5^x + 3) = 0$ ✓✓

$\therefore 5^x = 5$ of $5^x = -3$ *(geen oplossing nie)*

$\therefore x = 1$ ✓ (5)

wenk: $5^{-x} = \frac{1}{5}^x \quad \therefore 15.5^{-x} = 15 \times \frac{1}{5^x} = \frac{15}{5^x}$

wenk: Faktoriseer – trinoom

8. $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 12 = 0$

$\therefore (x^{\frac{1}{3}} - 4)(x^{\frac{1}{3}} + 3)$ ✓✓ $= 0$

$\therefore x^{\frac{1}{3}} = 4$ of $x^{\frac{1}{3}} = -3$ ✓

$\therefore x = 64$ ✓ of $x = -267$ ✓ (5)

wenk: $x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

[31]

1.5 Vergelykings met rasionale eksponente

1.5.1 Wenke

- Wanneer jy met vergelykings werk, moet jy dieselfde bewerking aan albei kante van die vergelyking doen.
- Kry die veranderlike van die breukeksponent alleen aan die een kant.
- Kry x alleen deur die breukeksponent na 'n eksponent van 1 te verander.
- Doen dit deur 'n eksponent vir albei kante te kies sodat $x^{\frac{m}{n}}$ gelyk word aan x^1.

bv. 18

1. $x^{\frac{1}{2}} = 3$ (verhef albei kante tot die mag 3)

$(x^{\frac{1}{2}})^2 = (3)^2$ ✓

$\therefore x^1 = 9$ ✓ (verhef albei kante tot die mag 2)

2. $x^{\frac{1}{2}} = -3$ ✓

$x^1 = (x^{\frac{1}{2}})^2 = 9$

(verhef albei kante tot die mag $\frac{4}{3}$)

3. $x^{\frac{3}{4}} = 8$

$(x^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{4}{3}}$ ✓

$x^1 = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$ ✓ ✓

4. $x^{\frac{2}{3}} = 4$

$(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = \pm 4^{\frac{3}{2}}$ ✓

$x = \pm (2^2)^{\frac{3}{2}} = \pm (2)^3$ ✓

$\therefore x = -8$ ✓ *of* $x = 8$ ✓

As die teller van die eksponent ewe is, dan kry ons 'n kwadratiese vergelyking met twee moontlike antwoorde.

$x^{\frac{2}{3}} = 4$

$\therefore x^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$

$\therefore (x^{\frac{1}{3}} - 2)(x^{\frac{1}{3}} + 2) = 0$

$\therefore x^{\frac{1}{3}} = 2$ of $x^{\frac{1}{3}} = -2$

$\therefore (x^{\frac{1}{3}})^3 = 2^3$ of $(x^{\frac{1}{3}})^3 = (-2)^3$

$\therefore x = 8$ of $x = -8$

Aktiwiteit 9

Los op vir x:

1. $x^{-\frac{3}{2}} = 8$ **2.** $\sqrt[5]{x^4} = 256$

[7]

Oplossings

1. $x^{-\frac{3}{2}} = 8$

$\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}}$ ✓✓ (verhef albei kante tot die mag $-\frac{2}{3}$)

$x^{+1} = 2^{-2}$ ✓ $(2)^{3 \times -\frac{2}{3}}$

$x = \frac{1}{4}$ (3)

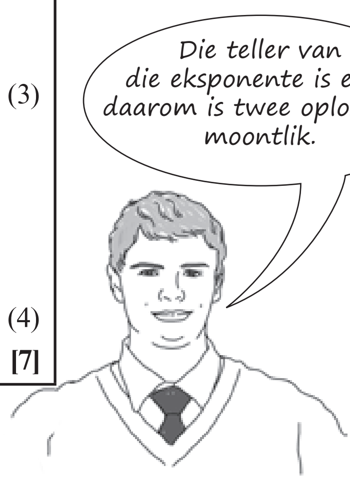
2. $\sqrt[5]{x^4} = 256$ (verander radikaal na breukeksponentvorm)

$x^{\frac{4}{5}} = \pm (2)^8$ ✓(verhef albei kante van die vergelyking tot die mag $\frac{5}{4}$)

$\left(x^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{4}} = \pm (2^8)^{\frac{5}{4}}$ ✓

$\therefore x = \pm (2)^{10}$ ✓ $= \pm 1024$ ✓ (4)

[7]



1.5.2 Eksponensiaalvergelykings met wortelvorms

bv. 19

Los op vir x:

$3\sqrt{x+2} + x = 2$ **[7]**

Oplossing

$3\sqrt{x+2} + x = 2$

$\therefore 3\sqrt{x+2} = 2 - x$

$\therefore \left(3\sqrt{x+2}\right)^2 = (2-x)^2$ ✓

$\therefore 9(x+2) = (2-x)(2-x)$ ✓

$\therefore 9x + 18 = 4 - 4x + x^2$ ✓

$\therefore 0 = x^2 - 13x - 14$ ✓

$\therefore 0 = (x-14)(x+1)$ ✓

$\therefore x = 14$ *of* $x = -1$ ✓

Kontroleer:

$x = 14$ $LK = 3\sqrt{14+2} + 14 = 3\sqrt{16} + 14 = 3 \times 4 + 14 = 26$ RK = 2

$\therefore x = 14$ *is nie 'n oplossing nie* ✓

$x = -1$ $LK = 3\sqrt{-1+2} + (-1) = 3\sqrt{1} - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2$ RK = 2

$\therefore x = -1$ *is 'n oplossing*

[7]

Aktiwiteit 10

Los hierdie vergelyking op en kontroleer jou oplossings.

1. $\sqrt{3x+4} - 5 = 0$ (3)

2. $\sqrt{3x-5} - x = 5$ (5)

[8]

Oplossings

1. $\sqrt{3x+4} - 5 = 0$

$\sqrt{3x+4} = 5$ (isoleer die radikaal)

$(\sqrt{3x+4})^2 = 5^2$ ✓ (kwadreer albei kante van die vergelyking)

$3x + 4 = 25$ ✓

$3x = 21$

$x = 7$ ✓

Kontroleer:

LK: $\sqrt{3(7)+4} - 5$

$= \sqrt{21+4} - 5$

$= \sqrt{25} - 5$

$= 0$

$= \text{RK}$

$\therefore x = 7$ is 'n oplossing (3)

2. $\sqrt{3x-5} - x = 5$

$\sqrt{3x-5} = x - 5$ (isoleer altyd eers die radikaal)

$(\sqrt{3x-5})^2$ ✓ $= (x-5)^2$ (kwadreer albei kante)

$3x - 5 = x^2 - 10x + 25$ ✓ Onthou: $(x-5)^2 \neq x^2 + 25$

$0 = x^2 - 13x + 30$ ✓ (kwadratiese vergelyking, stel = 0)

$0 = (x-10)(x-3)$ ✓ (faktoriseer die trinoom en maak elke faktor = 0)

$x = 10$ of $x = 3$

Kontroleer jou antwoord:

As $x = 10$	As $x = 3$
LK:	LK
$\sqrt{3(10)-5} - 10$	$\sqrt{3(3)-5} - 3$
$= \sqrt{25} - 10$	$= \sqrt{4} - 3$
$= -5 = \text{RK}$	$= -1 \neq \text{RK}$

(5)

$\therefore x \neq 3$ en slegs $x = 10$ is 'n oplossing. ✓ **[8]**

1.6 Eksamentipe voorbeelde

Aktiwiteit 11

1. Vereenvoudig die volgende:

a) $\dfrac{6^{6x}.9^{3x}}{54^{4x}.\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}}$

b) $\dfrac{2^{2x+2}-2^{2x-1}}{4^{x}+8.2^{2x-4}}$

2. Los op vir x:

a) $3^{x}-3^{x-1}=6$

b) $4^{(x+1)(x-3)}=8^{-x}$

c) $2^{2x}-3\times 2^{x}-4=0$

[22]

Oplossings

a) $\dfrac{6^{6x}.9^{3x}}{54^{4x}.\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}}=\dfrac{(2\times 3)^{6x}.(3^{2})^{3x}\checkmark}{(2\times 3^{3})^{4x}(2^{-2})^{2-x}\checkmark}=\dfrac{2^{6x}\times 3^{6x}\times 3^{6x}}{2^{4x}\times 3^{12x}\text{ x }2^{-4+2x}}\checkmark$

$=\dfrac{2^{6x}\times 3^{6x}\times 3^{6x}}{2^{4x}\times 3^{12x}\times 2^{-4+2x}}\checkmark$

$=2^{4}\times 3^{0}=16\checkmark$ (5)

b) $\dfrac{2^{2x+2}-2^{2x-1}}{4^{x}+8.2^{2x-4}}=\dfrac{2^{2x}.2^{2}-2^{2x}.2^{-1}}{2^{2x}+2^{3}.2^{2x}.2^{-4}}$

$=\dfrac{2^{2x}(2^{2}-2^{-1})\checkmark}{2^{2x}(1+2^{3}.2^{-4})\checkmark}$

$=\dfrac{2^{2x}\left(2^{2}-\frac{1}{2}\right)}{2^{2x}\left(1+\frac{2^{3}}{2^{4}}\right)}$

$=\dfrac{4-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\checkmark=\left(\dfrac{8-1}{2}\right)\div\left(\dfrac{2+1}{2}\right)$

$=\left(\dfrac{7}{2}\right)\div\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}\checkmark$ (4)

2. a)

$3^{x}-3^{x-1}=6$

$3^{x}-3^{x}.3^{-1}=6$

$3^{x}(1-3^{-1})=6\checkmark\checkmark$

$3^{x}\left(1-\frac{1}{3}\right)=6\checkmark$

$3^{x}\left(\frac{2}{3}\right)=6$

$3^{x}=6\times\frac{3}{2}$

$3^{x}=9$

$3^{x}=3^{2}\therefore x=2\checkmark$ (4)

b)

$4^{(x+1)(x-3)}=8^{-x}$

$4^{x^{2}-2x-3}=(2^{3})^{-x}$

$(2^{2})^{x^{2}-2x-3}=2^{-3x}\checkmark$

$2^{2x^{2}-4x-6}=2^{-3x}$

$\therefore 2x^{2}-4x-6=-3x\checkmark$

$\therefore 2x^{2}-x-6=0\checkmark$

$\therefore (2x+3)(x-2)=0\checkmark$

$\therefore x=-\dfrac{3}{2}$ *of* $x=2\checkmark$ (5)

c)

$2^{2x}-3\times 2^{x}-4=0$

$(2^{x}-4)(2^{x}+1)\checkmark\checkmark=0$

$\therefore 2^{x}=4$ of $2^{x}=-1$ *(geen oplossing nie)* $\checkmark$

$\therefore x=2\checkmark$ (4)

[22]

Wat jy moet kan doen:

- Gebruik die eksponentwette om uitdrukkings te vereenvoudig.
- Doen berekeninge met negatiewe magte
- Vermenigvuldig en deel magte
- Tel magte op en trek magte af
- Los eksponensiaalvergelykings op, onder andere dié met rasionale eksponente
- Vereenvoudig wortelvorms en doen bewerkings met wortelvorms
- Rasionaliseer die noemer indien nodig
- Los vergelykings met wortelvorms op.

eksamen

Feb/Maart 2014 V 1.1.3
Nov 2013 V 1.3
Feb/Maart 2013 V 1.1.3
Feb/Maart 2011 V 1.3
Nov 2010 V 1.3
Feb/Maart 2010 V 1.4

Eenheid 2

Algebra

2.1 Algebraïese uitdrukkings

Algebraïese uitdrukkings bestaan uit konstantes, veranderlikes en getalbewerkings (optel, aftrek, deel en vermenigvuldig).

Die veranderlikes word met letters aangetoon soos x, y, a, b, p, m, n, ens.

Die terme in 'n algebraïese uitdrukking word deur 'n plus- of minusteken geskei.

bv. 1

- $2x + 3y$ is 'n algebraïese uitdrukking met twee terme $2x$ en $3y$.
- $2x(3y)$ is slegs een term.
- $(2x + 3y)(2x - 3y)$ is ook slegs een term want dit is twee uitdrukkings in hakies wat vermenigvuldig word. Die hakies word nie deur 'n + of – geskei nie.
- $\sqrt{2x-3}$ is ook 'n algebraïese uitdrukking met een term want vierkantswortels kan as eksponente geskryf word. $\sqrt{2x-3} = (2x-3)^{\frac{1}{2}}$.

2.2 Optelling en aftrekking

Maak seker jy ken hierdie feite:

- Ons kan gelyksoortige terme optel en aftrek.
- As die terme gelyksoortig is, kan ons die koëffisiënte optel en aftrek.
- Gelyksoortige terme het dieselfde veranderlikes (letters) en die veranderlikes moet dieselfde eksponente hê.

bv. 2

$3x + 5x = 8x$

$-3a + 10a = 7a$

$6x^2y + 3x - 10x^2y = -4x^2y + 3x$

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$

Ons kan nie ongelyksoortige terme optel of aftrek nie.

2.3 Vermenigvuldiging en deling

Maak seker jy ken hierdie feite:

positiewe getal x positiewe getal = positiewe antwoord $3x \times 5y^2 = 15xy^2$
positiewe getal x negatiewe getal = negatiewe antwoord $3x \times -5y^2 = -15xy^2$
negatiewe getal x positiewe getal = negatiewe antwoord $-3x \times 5y^2 = -15xy^2$
negatiewe getal x negatiewe getal = positiewe antwoord $-3x \times -5y^2 = 15xy^2$

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

bv. 3

$\frac{6x}{7y} \times \frac{3}{5z} = \frac{18x}{35yz}$

wenk Vermenigvuldig tellers en vermenigvuldig noemers. Vereenvoudig indien moontlik.

bv. 4

$\frac{6x}{8y} + \frac{3}{12z} = \frac{6x3z + 3(2y)}{24yz} = \frac{18xz + 6y}{24yz}$

✓ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

wenk Bepaal eers die kleinste gemene veelvoud van die noemer (KGV). 8 en 12 het 'n KGV van 24.

Die distributiewe wet:

$c(a + b) = c \times a + c \times b = ac + bc$

bv. 5

$-3x(5x - 6y) = -15x^2 + 18xy$

$(x + y)(a + b) = ax + bx + ay + by$

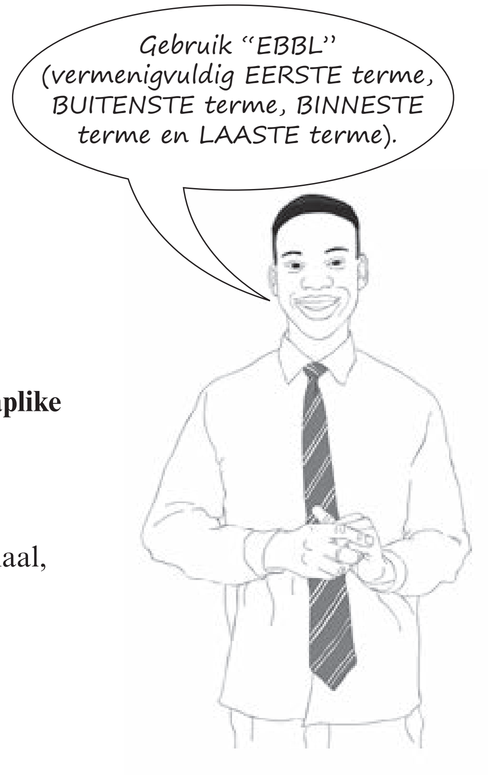
bv. 6

$(2x + y)(3x - 2y) = 6x^2 - 4xy + 3xy - 2y^2 = 6x^2 - xy - 2y^2$

2.4 Faktorisering

Wat beteken dit om 'n "uitdrukking te faktoriseer"?

Dit beteken om die uitdrukking as 'n produk van sy faktore te skryf.



bv. 7

Hier is 'n paar maniere om 'n uitdrukking te faktoriseer:

1. Bepaal die **gemeenskaplike faktor**:
   $9x^2 - 6xy^2 = 3x(3x - 2y^2)$
2. Faktoriseer deur **groepering in pare en bepaal dan 'n gemeenskaplike faktor**:
   $3xy - 2x + 3y - 2$
   $= 3xy + 3y - 2x - 2$
   $= 3y(x + 1) - 2(x + 1)$ Wanneer jy 'n negatiewe faktor uithaal, verander die tekens in die hakie.
   $= (x + 1)(3y - 2)$
3. Faktoriseer 'n **verskil van twee vierkante**:
   $16x^2 - y^2 = (4x - y)(4x + y)$
4. Faktoriseer 'n **verskil van twee derdemagte**:
   $8x^3 - y^3 = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$
5. Faktoriseer 'n **som van twee derdemagte**:
   $27a^3 + 64b^3 = (3a + 4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$
6. Faktoriseer 'n **trinoom**:
   $9x^2 + 5x - 4 = (9x - 4)(x + 1)$

wenk

Wanneer mens faktoriseer, moet jy eers 'n gemeenskaplike faktor uithaal, indien moontlik. Daarna kan mens kyk of jy die verskil van twee vierkante of die som/verskil van twee derdemagte of 'n trinoom kan faktoriseer.

2.5 Notas oor die faktorisering van 'n trinoom

Die volgende stappe sal verduidelik hoe om 'n trinoom te faktoriseer:

bv. **8** Faktoriseer $3x^2 + 11x + 6$

Stap 1: Vermenigvuldig die koëffisiënt van x^2 en die konstante waarde ($+3 \times +6 = 18$).

Stap 2: Skryf al die produkte van 18 neer: 10×1
9×2
6×3

Stap 3: Ons gaan 9×2 gebruik want $9 + 2 = 11$, die middelterm.

Stap 4: Ons skryf die middelterm ($11x$) as $9x + 2x$
$\therefore 3x^2 + 11x + 6$
$= 3x^2 + 9x + 2x + 6$.... ons het eers die $9x$ geskryf, gevolg deur die $2x$

wenk
Ons skryf eerste die $9x$ en tweede die $2x$ want: Daar is 'n gemeenskaplike faktor tussen $3x^2$ en $9x$.
Daar is 'n gemeenskaplike faktor tussen $2x$ en 6.

Stap 5: Ons groepeer nou die vier terme en faktoriseer deur 'n gemeenskaplike faktor uit te haal.
$3x^2 + 9x + 2x + 6$
$= 3x(x + 3) + 2(x + 3)$
$= (x + 3)(3x + 2)$

bv. **9** Faktoriseer $4x^2 + 9x - 13$

Stap 1: Vermenigvuldig die koëffisiënt van x^2 en die konstante waarde ($+4 \times -13 = -52$).

Stap 2: Skryf al die produkte van 52 neer: 52×1
26×2
13×4

Stap 3: Ons gaan 13×4 gebruik, want $13 - 4 = 9$, die middelterm.

Stap 4: Ons skryf die middelterm ($9x$) as $-4x + 13x$
$\therefore 4x^2 + 9x - 13$
$= 4x^2 - 4x + 13x - 13$.... ons het eers die $-4x$ geskryf, gevolg deur die $13x$

wenk
Ons skryf eerste die $-4x$ en tweede die $13x$ want: Daar is 'n gemeenskaplike faktor tussen $4x^2$ en $-4x$. Daar is 'n gemeenskaplike faktor tussen $13x$ en -13 .

Stap 5: Ons groepeer nou die vier terme en faktoriseer deur 'n gemeenskaplike faktor uit te haal.
$4x^2 - 4x + 13x - 13$
$= 4x(x - 1) + 13(x - 1)$
$= (x - 1)(4x + 13)$

bv. **10** Faktoriseer $8x^2 - 18x + 9$

Stap 1: Vermenigvuldig die koëffisiënt van x^2 en die konstante waarde ($+8 \times +9 = 72$).

Stap 2: Skryf al die produkte van 72 neer: 72×1
36×2
24×3
18×4
12×6
9×8

Stap 3: Ons gaan 12×6 gebruik, want $-12 - 6 = -18$, die middelterm.

Stap 4: Ons skryf die middelterm $(-18x)$ as $-12x - 6x$ of $-6x - 12x$
$\therefore 8x^2 - 18x + 9$
$= 8x^2 - 12x - 6x + 9$.... ons het eers die $-4x$ geskryf, gevolg deur die $13x$

Stap 5: Ons groepeer nou die vier terme en faktoriseer deur 'n gemeenskaplike faktor uit te haal.
$8x^2 - 12x - 6x + 9$
$= 4x(2x - 3) - 3(2x - 3)$
$= (2x - 3)(4x - 3)$

wenk

In hierdie voorbeeld kan ons eers $-12x$ skryf en dan $-6x$ of eers $-6x$ en dan $-12x$. Ons het 'n gemeenskaplike faktor tussen $8x^2$ en $-12x$ en tussen $-12x$ en 9. Ons het 'n gemeenskaplike faktor tussen $8x^2$ en $-6x$ en tussen $-6x$ en 9.

Aktiwiteit 1

Faktoriseer elkeen van die volgende volledig:

1. $12x^2 + 17x + 6$ **2.** $5x^2 - 23x - 10$ **3.** $9x^2 + 5x - 4$
4. $12x^2 - 11x + 2$ **5.** $5x^2 - 45$ **6.** $2x^3 + 16$
7. $6x^3 - 13x^2 + 5x$

[16]

Oplossings

1. $12x^2 + 17x + 6$
$= 12x^2 + 9x + 8x + 6$...........$12 \times 6 = 72$ en $72 = 9 \times 8$ $(9 + 8 = 17)$
$= 3x(4x + 3) + 2(4x + 3)$
$= (4x + 3)(3x + 2)$ ✓✓ (2)

2. $5x^2 - 23x - 10$
$= 5x^2 - 25x + 2x - 10$............$5 \times -10 = -50$ en $50 = 25 \times 2$ $(-25 + 2 = -23)$
$= 5x(x - 5) + 2(x - 5)$
$= (x - 5)(5x + 2)$ ✓✓ (2)

3. $9x^2 + 5x - 4$
$= 9x^2 + 9x - 4x - 4$.............$9 \times -4 = -36$ en $36 = 9 \times 4$ $(9 - 4 = 5)$
$= 9x(x + 1) - 4(x + 1)$
$= (x + 1)(9x - 4)$ ✓✓ (2)

4. $12x^2 - 11x + 2$
$= 12x^2 - 3x - 8x + 2$.............$12 \times 2 = 24$ en $24 = 8 \times 3$ $(-8 - 3 = -11)$
$= 3x(4x - 1) - 2(4x - 1)$
$= (4x - 1)(3x - 2)$ ✓✓ (2)

5. $5x^2 - 45$............................Gemeenskaplike faktor van 5
$= 5(x^2 - 9)$ ....Verskil van twee vierkante
$= 5(x - 3)(x + 3)$ ✓✓ (2)

6. $2x^3 + 16$............................Gemeenskaplike faktor van 2
$= 2(x^3 + 8)$ ✓............................Som van twee derdemagte
$= 2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ ✓✓ (3)

7. $6x^3 - 13x^2 + 5x$............................Gemeenskaplike faktor van x
$= x(6x^2 - 13x + 5)$ ✓............................Trinoom faktorisering
$= x(6x^2 - 3x - 10x + 5)$ .... $6 \times 5 = 30$ en $30 = 10 \times 3$ $(-3 - 10 = -13)$
$= x[3x(2x - 1) - 5(2x - 1)]$
$= x[(2x - 1)(3x - 5)]$ ✓✓ (3)

[16]

2.6 Kwadratiese vergelykings

bv. 11

Hier is 'n paar kwadratiese vergelykings:

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

2. $3x^2 – 7x = 12$

3. $3x(x – 9) + 2 = 5x$ $3x \times x = 3x^2$ so die vergelyking het x^2 as sy hoogste mag van x

Kwadratiese vergelykings kan in die standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$ geskryf word.

bv. 12

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$ So $a = 1$, $b = 5$ en $c = 6$

2. $3x^2 – 4x = 12$
$3x^2 – 4x – 12 = 0$ So $a = 3$, $b = –4$ en $c = –12$

3. $3x(x – 9) + 2 = 5x$
$3x^2 – 27x + 2 – 5x = 0$
$3x^2 – 32x + 2 = 0$ So $a = 3$, $b = –32$ en $c = 2$

2.6.1 Los 'n kwadratiese vergelyking op deur faktorisering:

Wat beteken dit om "'n kwadratiese vergelyking op te los"?

Dit beteken om die onbekende waarde(s) van x in 'n kwadratiese vergelyking te bepaal. Die x-waardes in 'n kwadratiese vergelyking word ook die **wortels** van die vergelyking genoem wanneer die vergelyking gelyk is aan nul.

bv. 13

Los op vir x:

$x^2 – 7x = –10$
$x^2 – 7x + 10 = 0$ Skryf in standaardvorm en gelyk aan 0
$x^2 – 5x – 2x + 10 = 0$ Faktoriseer die trinoom
$x(x–5) –2(x–5) = 0$
$(x – 5)(x – 2) = 0$

$\therefore x – 5 = 0$ of $x – 2 = 0$
$x = 5$ $\therefore x = 2$

Aktiwiteit 2

Los op vir x:

1. $x(x + 3) = 0$ **2.** $x(2x – 5) = 12$ **3.** $2x^2 + x - 6 = 0$

4. $2x^2 = 32$ **5.** $3x + \frac{1}{x} = 4,\ x \neq 0$ **6.** $2\sqrt{x - 3} = x - 3$

[22]

Oplossings

1. $x(x+3)=0$ — Ons het 'n produk = 0. Daarom stel ons elke faktor = 0

$x=0$ of $x+3=0$

$x=0$ ✓ of $x=-3$ ✓ (2)

2. $x(2x-5)=12$ — Ons het 'n produk = 0 nodig. Daarom vermenigvuldig ons die hakies uit en skryf in standaardvorm met al die terme aan die een kant en gelyk aan 0

$(2x+3)(x-4)=0$ — Faktoriseer

$2x+3=0$ of $x-4=0$ — Stel elke faktor = 0

$2x=-3$ of $x=4$

$x=-\frac{3}{2}$ ✓ $x=4$ ✓ (2)

3. $2x^2+x-6=0$

$(2x-3)(x+2)=0$ ✓✓

$\therefore 2x=3$ of $x=-2$ — Bepaal die oplossing deur elke faktor gelyk te stel aan nul

$\therefore x=\frac{3}{2}$ of $x=-2$ ✓✓ (4)

4. $2x^2=32$

$2x^2-32=0$ — Skryf in standaardvorm met al die terme aan een kant en gelyk aan 0

$x^2-16=0$ ✓ — Deel elke term aan albei kante deur 2

$(x+4)(x-4)=0$ ✓ — Faktoriseer (die verskil van twee vierkante)

$\therefore x+4=0$ of $x-4=0$

$\therefore x=-4$ ✓ of $\therefore x=4$ ✓ (4)

5. $3x+\frac{1}{x}=4,\ x\neq 0$ — Vermenigvuldig regdeur met x en raak ontslae van die noemer

$3x^2+1=4x$ — Skryf in standaardvorm met al die terme aan die een kant en gelyk aan 0

$3x^2-4x+1=0$ ✓ — Faktoriseer (die trinoom)

$(3x-1)(x-1)=0$ ✓✓

$\therefore 3x-1=0$ of $x-1=0$

$\therefore 3x=1$ of $x=1$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ ✓ of $\therefore x=1$ ✓ (5)

6. $2\sqrt{x-3}=x-3$ — Kwadreer albei kante

$(2\sqrt{x-3})^2=(x-3)^2$

$4(x-3)=(x-3)(x-3)$ ✓

$4x-12=x^2-6x+9$

$0=x^2-10x+21$ ✓

$0=(x-7)(x-3)$ ✓

$\therefore x-7=0$ of $x-3=0$

$\therefore x=7$ ✓ of $x=3$ ✓ (5)

[22]

Kontroleer jou antwoorde:

$x=7$

LK $=2\sqrt{7-3}=2\sqrt{4}=2(2)=4$ $RK=7-3=4$ $\therefore$ *x = 7 is 'n oplossing*

$x=3$

LK $=2\sqrt{3-3}=2\sqrt{0}=0$ $RK=3-3=0$ $\therefore$ *x = 3 is 'n oplossing*

As 'n kwadratiese vergelyking nie gefaktoriseer kan word nie, is daar ander maniere om die wortels of oplossings te bepaal. Soms bestaan die oplossings nie!

2.6.2 Voltooi die vierkant

bv. 14

Skryf $y = 3x^2 + 12x + 9$ in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

Om dit te doen, kan ons 'n paar stappe volg:

$y = 3x^2 + 12x + 9$	Om die vierkant te voltooi, moet die koëffisiënt van x^2 gelyk wees aan een (1). Ons haal 3 uit as 'n faktor sodat die koëffisiënt van x^2 een is.
$y = 3[x^2 + 4x + 3]$	Haal (helfte van die koëffisiënt van x) uit en kwadreer die getal. Tel hierdie antwoord op en trek dit af om die vergelyking gebalanseerd te hou. Die koëffisiënt van x is +4. Halveer 4 = 2. $(+2)^2 = 4$.
$y = 3[x^2 + 4x + (+2)^2 + 3 - (+2)^2]$	Dus, tel 4 op en trek 4 af.
$y = 3[x^2 + 4x + 4 + 3 - 4]$ $= 3[\underbrace{x^2 + 4x + (+2)^2}_{(x+2)^2} + 3 - 4]$	Nou kan ons die vierkant voltooi deur faktorisering.
$y = 3[(x + 2)^2 + 3 - 4]$ $y = 3[(x + 2)^2 - 1]$ $y = 3(x + 2)^2 - 3$	

Ons het nou $y = 3x^2 + 12x + 9$ geskryf as $y = 3(x + 2)^2 - 3$. Daarom het ons
$y = ax^2 + bx + c$ in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ geskryf met $a = 3$, $p = 2$ en $q = -3$.

Die kwadratiese vergelyking $y = 3x^2 + 12x + 9$ help ons om die ***y*-afsnit** te identifiseer, terwyl die vorm $y = 3(x + 2)^2 - 3$ ons help om die **draaipunt** te identifiseer. *Verwys na grafieke in eenheid 4 oor **Funksies**.*

Aktiwiteit 3

1. Watter term kan by die volgende vergelykings getel word om 'n volkome vierkant te vorm?

a) $0 = x^2 - 8x + ?$ **b)** $y = x^2 + 9x + ?$ **c)** $y = x^2 - \frac{b}{a}x + ?$

2. Los op vir x deur die metode van die voltooiing van die vierkant te gebruik.

a) $-3x^2 + 5x + 4 = 0$ **b)** $ax^2 + bx + c = 0$ **[17]**

Oplossings

1a) $0 = x^2 - 8x + (-4)^2$ Gebruik die helfte van -8 gekwadreer

$0 = x^2 - 8x + 16$

$0 = (x - 4)^2$ ✓ (1)

b) $y = x^2 + 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2$

$y = x^2 + 9x + \frac{81}{4}$

$y = \left(x + \frac{9}{2}\right)^2$ ✓✓ (2)

c) $y = x^2 - \frac{b}{a}x + ?$ Gebruik die helfte van $-\frac{b}{a}$ gekwadreer

$y = x^2 - \frac{b}{a}x + \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}$

$y = \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2$ ✓✓ (2)

2a) $-3x^2 + 5x + 4 = 0$ Deel elke term aan albei kante deur -3

$x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ Kry die konstante waarde op sy eie aan die RK

$x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{4}{3}$ ✓ Tel (½ koëffisiënt van x term)^2 aan albei kante by

$x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{4}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ ✓ Voltooi die vierkant deur faktorisering van die LK

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2$ ✓ $= \frac{4}{3} + \frac{25}{36}$ Tel die konstante waardes aan die RK op

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{48 + 25}{36}$

$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{73}{36}$ ✓ Kry die vierkantswortel van albei kante

$x - \frac{5}{6} = \pm\sqrt{\frac{73}{36}}$ Kry x alleen

$x = \frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{73}}{6}$ Skei die twee waardes van die vierkantswortel

$x = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{73}}{6}$ of $x = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{73}}{6}$ ✓✓ (6) Gebruik 'n sakrekenaar om elke waarde te bepaal

$x = 2{,}2573\ldots$ of $x = -0{,}5906\ldots$

$\therefore x = 2{,}26$ of $x = -0{,}59$ Rond af tot twee desimale plekke

Dit is die wortels van die vergelyking

b) $ax^2 + bx + c = 0$ Deel elke term aan albei kante deur a

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Kry die konstante term op sy eie aan die RK

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ ✓ Tel (½ koëffisiënt van x term)^2 aan albei kante by

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ ✓ Dit vorm 'n volkome vierkant aan die LK

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ ✓ Tel die konstante waardes aan die RK op

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ✓

$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ Kry die vierkantswortel van albei kante

$\therefore x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$

$\therefore x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$ Kry x alleen

$\therefore x = -b \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{2a}}$ ✓✓ (6) Skryf die twee breuke as een breuk **[17]**

2.6.3 Los kwadratiese vergelykings op met die formule

Party kwadratiese vergelykings kan nie gefaktoriseer word nie, maar daar is 'n ander manier om die wortels van die vergelyking te bepaal.

bv. 15

Kan jy die faktore vir hierdie kwadratiese vergelyking bepaal: $x^2 - 5x + 3 = 0$?

Daar is geen rasionale getalle wat vermenigvuldig kan word om 3 te kry en opgetel kan word om 5 te kry nie,

gebruik dus die kwadratiese formule om die vergelyking op te los.

> Die standaardvorm van die kwadratiese vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ word gebruik en daaruit word die formule afgelei:
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vir $x^2 - 5x + 3 = 0$ $\quad a = 1$, $b = -5$ en $c = 3$

Vervang hierdie waardes vir a, b en c in die formule:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{OF} \quad x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

Aktiwiteit 4: Interpreteer 'n grafiek

Los op vir x (korrek tot twee desimale plekke):

$4x^2 - 8x = 7$

$2x(3x + 5) - 11 = 0$ **[9]**

Oplossings

1. $4x^2 - 8x = 7$ — Skryf die vergelyking in standaardvorm ($ax^2 + bx + c = 0$)

$4x^2 - 8x - 7 = 0$ — Lys die waardes van a, b en c

$a = 4$; $b = -8$; $c = -7$ — Skryf die formule neer

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ — Vervang die waardes vir a, b en c in die formule.

$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(-7)}}{2(4)}$ ✓✓ — Vereenvoudig die waarde onder die wortelteken

$x = \frac{8 \pm \sqrt{176}}{8}$ — Skei die positiewe en negatiewe waarde van die vierkantswortel

$x = \frac{8 + \sqrt{176}}{8}$ of $x = \frac{8 - \sqrt{176}}{8}$ ✓ — Antwoorde in wortelvorm

$x = 2{,}66$ ✓ of $x = -0{,}66$ ✓ — Antwoorde korrek tot twee desimale plekke (5)

2. $2x(3x + 5) - 11 = 0$ — Skryf die vergelyking in standaardvorm

$6x^2 + 10x - 11 = 0$ ($ax^2 + bx + c = 0$)

$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 264}}{12}$ ✓✓

$= -10 \pm \frac{\sqrt{364}}{12}$ ✓

$= \frac{-5 \pm \sqrt{91}}{6}$ ✓ (4)

[9]

wenk

Hierdie wortels is irrasionaal. Tensy die vraag desimale waardes vereis, los dit in wortelvorm (die vierkantswortelvorm)

bv. 16

As $\frac{2}{3}$ 'n wortel is van die vergelyking $12x^2 - kx - 8 = 0$, bepaal die waarde van k.

Oplossing

As $\frac{2}{3}$ 'n wortel is van die vergelyking, dan $x = \frac{2}{3}$. Daarom kan ons $x = \frac{2}{3}$ in die vergelyking vervang:

$12x^2 - kx - 8 = 0$

$\therefore 12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - k\left(\frac{2}{3}\right) - 8 = 0$

$\frac{16}{3} - \frac{2}{3}k - 8 = 0$

$\therefore -\frac{2}{3}k = \frac{8}{3}$

$\therefore k = -4$

2.7 Kwadratiese ongelykhede

Los kwadratiese ongelykhede op

Om kwadratiese ongelykhede op te los

- Kry die ongelykheid in die standaardvorm $ax^2 + bx + c > 0$ of $ax^2 + bx + c < 0$ of $ax^2 + bx + c \leq 0$ of $ax^2 + bx + c \geq 0$
- As die waarde van a < 0, vermenigvuldig die vergelyking met –1.
- Faktoriseer die ongelykheid indien dit moontlik is of
- Gebruik die kwadratiese formule om die kritieke waardes te bepaal.

bv. 17 Los op vir x as $x^2 < 25$

Metode 1

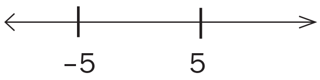
$x^2 < 25$

$x^2 - 25 < 0$

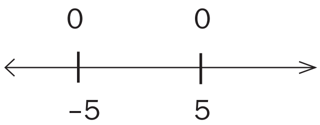
$(x - 5)(x + 5) < 0$

Die kritieke waardes is waar die uitdrukking $x^2 - 25$ gelyk is aan nul. Daarom is die kritieke waardes –5 en 5.

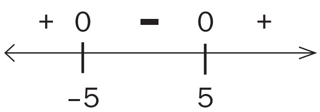
Ons dui nou –5 en 5 op 'n getallelyn aan.



Ons weet dat die uitdrukking $x^2 - 25 = 0$ by –5 en 5 is. Ons kan dit op hierdie getallelyn aandui.



Ons volgende stap is om waardes kleiner as –5, waardes tussen –5 en 5 en waardes groter as 5 te kies en dit in die uitdrukking $x^2 - 25$ te vervang. As die antwoord positief is, dui ons + op die getallelyn aan. As die antwoord negatief is, dui ons – op die getallelyn aan.



wenk

As $x = -10$,
dan $(-10)^2 - 25 = 75 > 0 \therefore +$

As $x = -6$,
dan $(-6)^2 - 25 = 11 > 0 \therefore +$

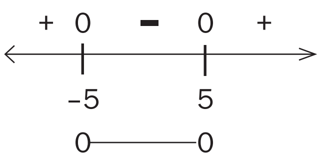
As $x = -3$,
dan $(-3)^2 - 25 = -16 < 0 \therefore -$

As $x = 2$,
dan $(2)^2 - 25 = -21 < 0 \therefore -$

As $x = 7$,
dan $(7)^2 - 25 = 24 > 0 \therefore +$

As $x = 9$,
dan $(9)^2 - 25 = 56 > 0 \therefore +$

Ons moet vir x oplos waar $x^2 - 25 < 0$. Die oplossing op die getallelyn is die interval waar ons 'n negatief sien. Dit gebeur tussen –5 en 5.



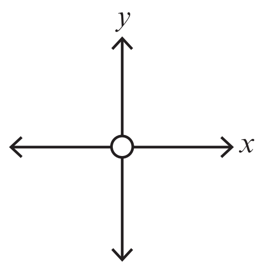
Daarom is die oplossing: $-5 < x < 5$

OF *Metode 2* deur gebruik te maak van 'n rowwe skets van die parabool:

Bokant die x-as is y positief

Op die x-as is y nul

Onder die x-as is y negatief

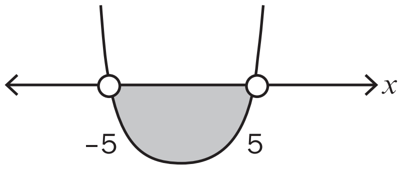


bv. 18 Los op vir x as $x^2 < 25$

$x^2 < 25$
$x^2 - 25 < 0$ Kry 0 aan die RK
$(x - 5)(x + 5) < 0$ Faktoriseer LK

Kritieke waardes van x: -5 en 5

Maak 'n rowwe skets van die parabool



As (***)(***) < 0 (beteken dit waar y negatief is)

Lees die x-waardes van die grafiek onder die x-as af

$-5 < x < 5$

Aktiwiteit 5

Los op vir x as

1. $(x + 3)(x - 5) \leq -12$

2. $-x \leq 2x^2 - 3$ **[10]**

Oplossings

1. $(x + 3)(x - 5) \leq -12$

$x^2 - 2x - 15 + 12 \leq 0$ Kry dit in die standaardvorm ($ax^2 + bx + c \leq 0$)

$x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ✓

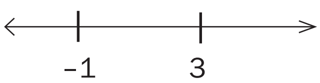
Faktoriseer die trinoom:

$(x - 3)(x + 1) \leq 0$ ✓

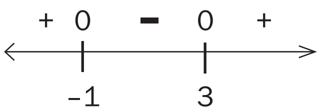
<u>Kritieke waardes:</u>

$x = 3$ en $x - 1$

Ons dui nou 3 en -1 op 'n getallelyn aan.



Ons weet dat die uitdrukking $x^2 - 2x - 3 = 0$ by $x = 3$ en $x = -1$ is. Ons kan dit op die getallelyn aandui.



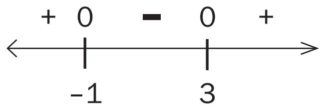
wenk

As $x = -10$, dan $(-10)^2$
$2(-10) - 3 = 117 > 0 \therefore +$

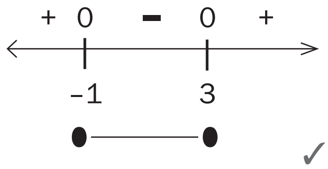
As $x = 1$, dan $(1)^2 - 2(1) - 3$
$= -4 < 0 \therefore -$

As $x = 5$, dan $(5)^2 - 2(5) - 3$
$= 12 > 0 \therefore +$

Ons volgende stap is om waardes kleiner as –1, waardes tussen –1 en 3 en waardes groter as 3 te kies en in die vergelyking $x^2 - 2x - 3$ te vervang. As die antwoord positief is, dui ons + op die getallelyn aan. As die antwoord negatief is, dui ons – op die getallelyn aan.



Ons moet vir x oplos waar $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Die oplossing op die getallelyn is die interval waar ons nul en 'n negatief sien. Dit gebeur wanneer die x-waardes kleiner as of gelyk is aan 3 en ook groter as of gelyk is aan –1.



✓

Daarom is die oplossing $-1 \leq x \leq 3$ ✓✓ (5)

2. $-x \leq 2x^2 - 3$

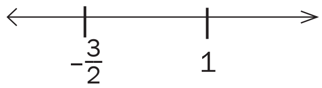
$-2x^2 - x + 3 \leq 0$ Kry dit in die standaardvorm $(ax^2 + bx + c \leq 0)$

$\frac{-2x}{-1} - \frac{x}{-1} + \frac{3}{-1} \geq \frac{0}{-1}$ Deel albei kante deur –1 om die koëffisiënt van x^2 na 'n positief te verander

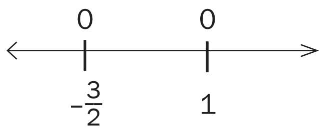
$2x^2 + x - 3 \geq 0$ ✓ Faktoriseer die trinoom

$(2x + 3)(x - 1) \geq 0$ ✓

<u>Kritieke waardes:</u>
$x = \frac{-3}{2}$ en $x = 1$
Ons dui nou $\frac{-3}{2}$ en 1 op 'n getallelyn aan.



Ons weet dat die uitdrukking $2x^2 + x - 3 = 0$ by $x = \frac{-3}{2}$ en $x = 1$ is. Ons kan dit op die getallelyn aandui:



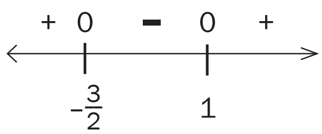
wenk

As $x = -10$, dan $2(-10)^2$
$+(-10) - 3 = 187 > 0 \therefore +$

As $x = 0$, dan $2(0)^2 - 0 - 3$
$= -3 < 0 \therefore -$

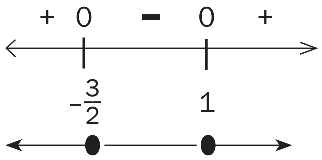
As $x = 3$, dan $2(3)^2 + 3 - 3$
$= 18 > 0 \therefore +$

Ons volgende stap is om waardes kleiner as $\frac{-3}{2}$, waardes tussen $\frac{-3}{2}$ en 1 en waardes groter as 1 te kies en in die vergelyking $2x^2 + x - 3$ te vervang. As die antwoord positief is, dui ons + op die getallelyn aan. As die antwoord negatief is, dui ons – op die getallelyn aan.



✓

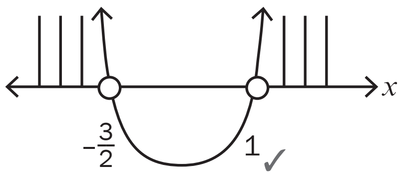
Ons moet vir x oplos waar $2x^2 + x - 3 \geq 0$. Die oplossing op die getallelyn is die interval waar ons nul en 'n positief sien. Dit gebeur vir die x-waardes kleiner as of gelyk aan $\frac{-3}{2}$ en vir die x-waardes groter as of gelyk aan 1.



Daarom is die oplossing: $x \leq -\frac{3}{2}$ of $x \geq 1$ ✓✓ (5)

OF *Metode 2* deur 'n rowwe skets van die parabool te gebruik:

$-x < 2x^2 - 3$	Kry dit in die standaardvorm $ax^2 + bx + c < 0$
$-2x^2 - x + 3 < 0$	Deel albei kante deur –1.
$\frac{-2x}{-1} - \frac{x}{-1} + \frac{3}{-1} > 0$	Dit is nodig om die rowwe skets van 'n "positiewe" parabool te skets.
$2x^2 + x - 3 > 0$ ✓	Met 0 aan die RK
$(2x + 3)(x - 1) > 0$ ✓	Faktoriseer die LK
Kritieke waardes van x: $\frac{-3}{2}$ en 1	Maak 'n rowwe skets van 'n parabool



As (***)(***) > 0 (beteken dit waar y positief is) Lees die x-waardes van die grafiek bokant die x-as af

$\therefore x < -\frac{3}{2}$ of $x > 1$ ✓✓ (5)

[10]

2.8 Gelyktydige vergelykings

bv. 19

Los x en y gelyktydig op:

$$y + 2x - 2 = 0 \text{ en } 2x^2 + y^2 = 3yx$$

In hierdie voorbeeld moet 'n kwadratiese vergelyking en 'n lineêre vergelyking gelyktydig opgelos word. Gebruik die volgende stappe:

Stap 1: Gebruik die lineêre vergelyking om een van die onbekendes die onderwerp van die vergelyking te maak (d.i. kry x of y alleen aan die een kant van die vergelyking)

Stap 2: Vervang x of y (watter een ookal die onderwerp van die vergelyking was) in die kwadratiese vergelyking in. Die vergelyking sal nou slegs een onbekende bevat.

Stap 3: Los die een onbekende op.

Stap 4: Vervang die onbekende wat sopas opgelos is in die lineêre vergelyking en los die ander onbekende op.

wenk

Wanneer jy besluit om te deel, moet jy partykeer tot die naaste getalle afrond wat makliker is om te deel.

wenk

Benoem altyd die vergelykings:

vergelyking 1 as verg (1) en vergelyking 2 as verg (2)

wenk

As die koëffisiënt van y in die lineêre vergelyking een is, kry y alleen aan die een kant van die vergelyking. As die koëffisiënt van x in die lineêre vergelyking een is, kry x alleen aan die een kant van die vergelyking. Op hierdie manier hoef jy nie met breuke te werk nie.

Oplossing

$y + 2x - 2 = 0$ ………….verg (1)

$2x^2 + y^2 = 3yx$……………...verg (2)

Stap 1: $y + 2x - 2 = 0$.............*uit verg* (1)

$\therefore y = 2 - 2x$...............*verg* (3)

Stap 2: Vervang verg (3) *in verg* (2)

$2x^2 + y^2 = 3yx$

$\therefore 2x^2 + (2 - 2x)^2 = 3x(2 - 2x)$

Stap 3: $2x^2 + (2 - 2x)(2 - 2x) = 3x(2 - 2x)$

$2x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 6x - 6x^2$

$12x^2 - 14x + 4 = 0$

$\div 2 \therefore 6x^2 - 7x + 2 = 0$

$\therefore (3x - 2)(2x - 1) = 0$

$\therefore x = \frac{2}{3}$ *of* $x = \frac{1}{2}$

Stap 4: Vervang $x = \frac{2}{3}$ *in verg* (3) in

$\therefore y = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

Vervang $x = \frac{1}{2}$ *in verg* (3) in

$\therefore y = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

bv. 20

Gegee die funksies $y = \frac{6}{x}$ en $y = x - 1$, bepaal die koördinate van die snypunte van die twee grafieke algebraïes.

$y = \frac{6}{x}$ … verg (1)
$y = x - 1$ … verg (2)

Vervang verg (2) in verg (1) in:
(Oral waar 'n y is, vervang dit met $(x - 1)$, deur hakies te gebruik)

$x - 1 = \frac{6}{x}$

$\therefore x^2 - x = 6$ KGV $= x$

$\therefore x^2 - x - 6 = 0$

$\therefore (x - 3)(x + 2)$

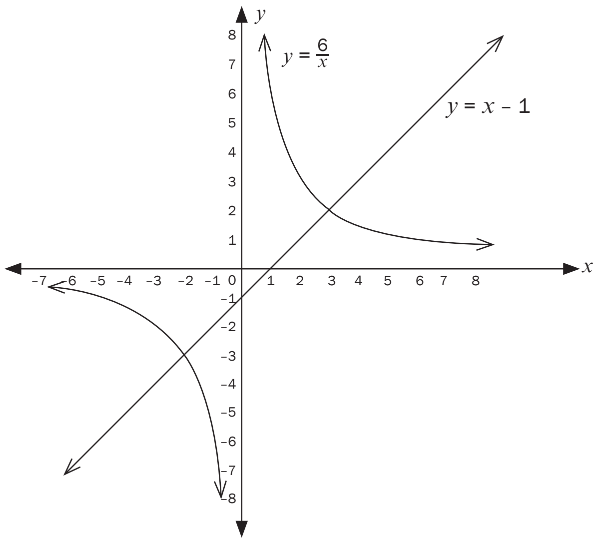
$\therefore x = 3$ en $x = -2$

Vervang $x = 3$ in verg (2):
$y = 3 - 1 = 2$

Vervang $x = -2$ in verg (2):
$y = -2 - 1 = -3$

$\therefore (3;2)$ en $(-2; -3)$ is die snypunte

Albei hierdie punte bevredig die vergelykings.
Die grafieke van die twee vergelykings sal by twee punte sny.



Aktiwiteit 6

Los die volgende vergelykings gelyktydig op.

1. $2x + y = 3$ en $x^2 + y + x = y^2$

2. $y = \frac{-6}{x+1} - 2$ en $y = -3x + 2$

[14]

Oplossings

1. $2x + y = 3$ .... verg (1)

$x^2 + y + x = y^2$ .... verg (2)

$y = -2x + 3$ ✓ .... verg (3) Gebruik die lineêre vergelyking (1) om y alleen aan die een kant van die vergelyking te skryf.

Vervang verg (3) in verg (2) in, om die y veranderlike te elimineer.

$x^2 + (-2x + 3) + x = (-2x + 3)^2$ ✓ Vereenvoudig albei kante.

$x^2 - x + 3 = 4x^2 - 12x + 9$ Faktoriseer die trinoom.

$0 = 3x^2 - 11x + 6$ ✓

$0 = (3x - 2)(x - 3)$ ✓

$\therefore 3x - 2 = 0$ of $x - 3 = 0$

$\therefore x = \frac{2}{3}$ of $\therefore x = 3$ ✓

Vervang hierdie twee waardes van x in verg (3) om die waardes vir y te bepaal.

Vervang $x = \frac{2}{3}$ *in verg* (3)

$\therefore y = -2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{5}{3}$ ✓

Vervang $x = 3$ *in verg* (3)

$\therefore y = -2(3) + 3 = -3$ ✓ (7)

Dus is daar twee oplossings: $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ en $(3; -3)$

2. $y = \frac{-6}{x+1} - 2$ en $y = -3x + 2$

$y = \frac{-6}{x+1} - 2$.....................(*verg* 1)

$y = -3x + 2$.......................(*verg* 2)

y is alleen aan een kant van albei vergelykings

$\therefore y = \frac{-6}{x+1} - 2 = -3x + 2$ ✓ ....KGN $= x + 1$

$\therefore -6 - 2(x + 1) = -3x(x + 1) + 2(x + 1)$ ✓

$\therefore -6 - 2x - 2 = -3x^2 - 3x + 2x + 2$

$\therefore 3x^2 - x - 10 = 0$ ✓

$\therefore (3x + 5)(x - 2) = 0$ ✓

$\therefore x = -\frac{5}{3}$ of $x = 2$ ✓

Vervang $x = -\frac{5}{3}$ *in verg* (2)

$y = -3\left(-\frac{5}{3}\right) + 2 = 7$ ✓

Vervang $x = 2$ *in verg* (2)

$y = -3(2) + 2 = -4$ ✓ (7)

[14]

2.9 Die aard van die wortels

2.9.1 Bepaal die aard van die wortels

Die wortels van enige kwadratiese vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ kan by $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ gekry word.

- Die wortels van 'n kwadratiese vergelyking is die x-waardes wanneer die vergelyking nul is.
- Die wortels is die x-afsnitte van die grafiek.
- Wanneer jy gevra word om die "aard van die wortels van 'n vergelyking te bepaal", word jy NIE gevra om die vergelyking op te los nie.

Opsomming:

Om die aard van die wortels van 'n kwadratiese vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$, te bepaal, kyk na die waarde van D, die diskriminant.

- As $\Delta < 0$: Die wortels is nie-reël/nie-reële wortels.
- As $\Delta = 0$: Daar is twee gelyke, reële en rasionale wortels.
- As $\Delta > 0$: Daar is twee reële wortels wat rasionaal of irrasionaal is.
  - As D 'n volkome vierkant is, is die wortels rasionaal.
  - As D nie 'n volkome vierkant is nie, dan is die wortels irrasionaal.

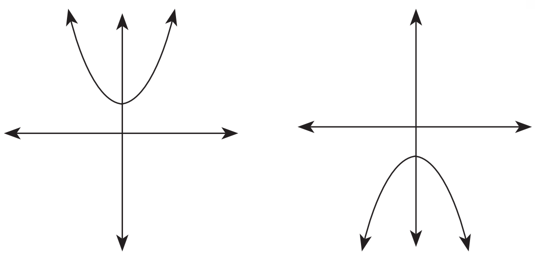
Die aard van die wortels vertel ons ook van die x-afsnitte van die grafiek van die kwadratiese vergelyking.

Aard van wortels | **Grafieke**

$\Delta < 0$

Wortels is nie-reël.

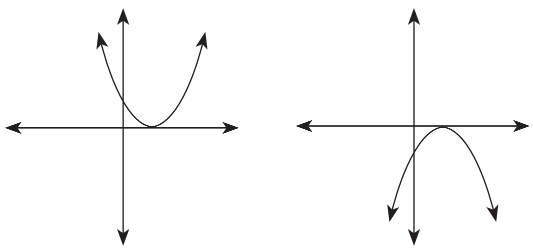
Daar is geen x-afsnitte nie.



$\Delta = 0$

Wortels is reël en gelyk.

Daar is net een x-afsnit en dit is by die draaipunt van die grafiek.

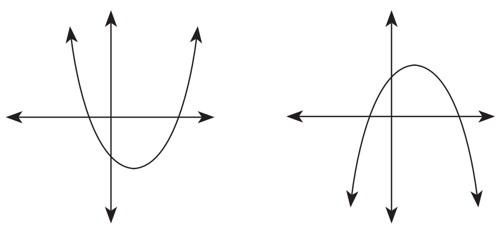


$\Delta > 0$

Wortels is reël en ongelyk (twee wortels):

As Δ 'n rasionale vierkantsgetal (kwadraat) is, is die wortels rasionaal.

As Δ nie 'n vierkantsgetal is nie, is die wortels irrasionaal.



bv. 21

1. $x = \frac{-6 \pm \sqrt{25}}{4}$

$\Delta = 25 \therefore \Delta > 0$, dus is daar twee reële wortels.

Ons kan sien dat 25 'n volkome vierkant is ($\sqrt{25} = 5$)

Dus sal die wortels **reël**, **rasionaal** en **ongelyk** wees.

2. $x = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$

$\Delta = 24 \therefore \Delta > 0$, dus is daar twee reële wortels. 24 is nie 'n volkome vierkant nie

($\sqrt{24} = 4{,}898979486\ldots$)

Dus sal die wortels **reël**, **irrasionaal** en **ongelyk** wees.

3. $x = \frac{-5 \pm \sqrt{-9}}{8}$

$\Delta = -9 \therefore \Delta < 0$, dus is $\sqrt{-9}$ nie-reël. Daar is geen reële oplossings vir x nie, dus is die wortels **nie-reël**.

bv. 22

Die oplossings vir 'n kwadratiese vergelyking is: $x = 5 \pm \sqrt{10 + 2a}$.

Vir watter waardes van a sal die vergelyking gelyke wortels hê?

Oplossing

Die vergelyking sal gelyke wortels hê as $\Delta = 0$.

$\Delta = 10 + 2a$

$0 = 10 + 2a$

$10 = -2a$

$\therefore a = -5$

Aktiwiteit 7

1. Toon aan dat die wortels van $x^2 - 2x - 7 = 0$, irrasionaal is sonder om die vergelyking op te los. (3)
2. Toon aan dat $x^2 + x + 1 = 0$ nie reële wortels het nie. (3)
3. As $x = 2$ 'n wortel is van die vergelyking $3x^2 - 5x - 2k = 0$, bepaal die waarde van k. (2)
4. Die oplossing van 'n kwadratiese vergelyking is: $x = 5 \pm \sqrt{12 - 3a}$.
   Vir watter waarde (s) van a sal die vergelyking gelyke wortels hê? (3)
5. Bepaal die waarde(s) van k waarvoor die vergelyking $3x^2 + (k + 2)\,x + k = 0$ gelyke wortels het. (4)

[15]

Oplossings

1. $a = 1; b = -2 ; c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-7)$ ✓

$= 4 + 28$

$= 32$ ✓

$\therefore$ Die wortels sal irrasionaal wees ✓

($\Delta > 0$ en is nie 'n volkome vierkant nie) (3)

2. $a = 1; b = 1; c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1)$ ✓

$= 1 - 4 = -3$ ✓

$\therefore$ Daar is geen reële wortels nie

($\Delta < 0$) ✓ (3)

3. As 2 'n wortel is van die vergelyking, dan is $x = 2$. Daarom kan ons $x = 2$ in die vergelyking vervang.

$3x^2 - 5x - 2k = 0$

$\therefore 3(2)^2 - 5(2) - 2k = 0$ ✓

$\therefore 12 - 10 - 2k = 0$

$\therefore 2k = 2$

$\therefore k = 1$ ✓ (2)

4. Die vergelyking sal gelyke wortels hê as $\Delta = 0$

$\Delta = 12 - 3a$

0 ✓ $= 12 - 3a$ ✓

$-12 = -3a$

$\therefore a = 4$ ✓ (3)

5. $3x^2 + (k + 2)x + k = 0$

$\therefore a = 3 ; b = (k + 2) ; c = k$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$

$= (k + 2)^2 - 4(3)(k)$ ✓

$= k^2 + 4k + 4 - 12k$

$= k^2 - 8k + 4$ ✓

Vir gelyke wortels is die $\Delta = 0$ ✓

$\therefore k^2 - 8k + 4 = 0$

$\therefore k = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$\therefore k = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$

$\therefore k = 7{,}46$ of $k = -0{,}54$ ✓ (4)

[15]

wenk

32 is nie 'n volkome vierkant nie, dus is die wortels irrasionaal.

wenk

$-3 < 0$

$\therefore$ is nie-reël

2.9.2 Probleemoplossing met kwadratiese vergelykings

Jy kan 'n vergelyking gebruik om 'n probleem voor te stel. Bepaal watter deel van die probleem onbekend is en met 'n veranderlike voorgestel moet word.

wenk

m^2 hier beteken vierkante meter. Dit is nie 'n veranderlike nie.

wenk

Afmetings: die mates van die sye

bv. 23

Die oppervlakte van 'n reghoek is 12 m^2.

Die lengte is 4 m langer as die breedte. Bepaal die afmetings van die reghoek.

Ons weet nie wat die lengte of die breedte van die reghoek is nie.

Wat ons wel weet, is dat die lengte 4 m langer is as die breedte.

Dit maak sin om die breedte gelyk te stel aan x m. Dan is die lengte $x + 4$ m.

Teken 'n skets om jou te help. Laat die breedte x m wees.

Oppervlakte van reghoek = lengte × breedte

$12 = (x + 4)x$

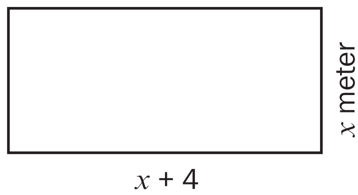
$12 = x^2 + 4x$

$0 = x^2 + 4x - 12$

$0 = (x + 6)(x - 2)$

$\therefore x + 6 = 0$ of $x - 2 = 0$

$x = -6$ $\quad$ $x = 2$



Die lengte en die breedte moet albei positiewe lengtes wees. Jy kan nie 'n negatiewe lengte hê nie!

Dus $x \neq -6$

$\therefore x = 2$ en dus is die breedte 2 m.

Die lengte is $x + 4$ en dus is die lengte 6 m.

Wat jy moet kan doen:

- Los kwadratiese vergelykings op deur faktorisering, waar moontlik.
- Skryf 'n kwadratiese vergelyking wat in die algemene vorm $y = ax^2 + bx + c$ geskryf is, oor in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ deur die vierkant te voltooi.
- Gebruik voltooiing van die vierkant om kwadratiese vergelykings op te los.
- Gebruik die formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ om die wortels van 'n vergelyking te bepaal.
- Gebruik die waarde van die diskriminant $(b^2 - 4ac)$ van 'n kwadratiese vergelyking om die aard van die wortels te bepaal.
- Los lineêre en kwadratiese ongelykhede op.
- Los gelyktydige vergelykings op om die snypunte tussen twee verskillende funksies te bepaal.

eksamen

Feb/Maart 2014 V1.1.1 & V1.1.2 & V1.2 & V1.3

Nov 2013 V1.1.1 & V1.1.2a,b & V1.1.3 & V1.2

Feb/Maart 2013 V1.1.1 & V1.1.2 & V1.1.4 & V1.2.1 & V1.2.2 & V1.2.3

Nov 2012 V1.1.1 & V1.1.1 & V1.1.3 & V1.2.1 & V1.3.1 & V1.3.2

Feb/Maart 2012 1.1.1 & 1.1.2 & 1.1.3 & 1.2

Nov 2011 V1.1.1 & V1.1.2 7 V1.1.3 & V1.2

Feb/Maart 2011 V1.1.1 & V1.1.2 & V1.1.3 & V1.2

3 Eenheid

Getalpatrone, rye en reekse

3.1 Getalpatrone

'n Lys getalle in volgorde word 'n getalpatroon of 'n getallery genoem.

Ons het ten minste drie getalle in die lys nodig om uit te werk of die getalle 'n patroon vorm. As ons net twee getalle het, kan ons nie verseker sê watter patroon dit is nie.

Byvoorbeeld, as ons die lys 2; 4; ... het, is daar baie moontlike verskillende getalpatrone:

Die patroon kan 2; 4; 6; ... wees; tel 2 by elke getal om die volgende getal te kry

OF 2; 4; 8; ... vermenigvuldig elke getal met 2 om die volgende getal te kry

OF 2; 4; 2; 4; ... herhaal die patroon

'n Enkele getal in 'n patroon of ry word 'n term genoem.

Term 1 word geskryf as T_1, term 2 word geskryf as T_2 en so aan. Die nommer van die term toon sy posisie in die ry aan.

T_{10} is die 10de term in die ry.
T_n is die n^{de} term in 'n ry.

bv. 1

1. Kyk na die getalpatroon 3; 8; 13; …

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
3	8	13	...	

+5 +5 +5 +5

As ons aanhou om **5** by elke term te tel, kry ons die volgende term:
$T_4 = 13 + 5 = 18$; $T_5 = 23$; $T_6 = 28$, ens.

2. Kyk na die getalpatroon 5; 15; 45; …

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
5	15	45	...	

× 3 × 3 × 3 × 3

In hierdie patroon word elke term met 3 vermenigvuldig om die volgende term te kry.
Dus $T_4 = 45 \times 3 = 135$; $T_5 = 405$; $T_6 = 1\,215$, en so aan.

3. Kyk na die ry: 1; 4; 9; …
$T_1 = 1^2$; $T_2 = 2^2$; $T_3 = 3^2$
Hierdie getalle is almal volkome vierkantgetalle. Elke getal is die nommer van die term tot die mag twee (gekwadreer).
Dus $T_4 = (4)^2 = 16$; $T_5 = (5)^2 = 25$; $T_6 = (6)^2 = 36$, en so aan.

Dit is belangrik om te leer om vierkantgetalle (kwadrate) te herken.

3.2 Rekenkundige rye

'n Rekenkundige ry is 'n ry waar die gemene verskil (d) tussen opeenvolgende terme konstant is.

$T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = T_n - T_{n-1} = d$ (gemene verskil)

bv. 2 Gegee die ry: 5; 9; 13; 17 ; . . .
a) Bepaal die gemene verskil
b) Bepaal die volgende twee terme

Oplossing
$d = 9 - 5 = 13 - 9 = 4$
$T_5 = 17 + 4 = 21$ en $T_6 = 21 + 4 = 25$

As ons a gebruik vir die eerste term T_1 en d vir die gemene verskil, dan is die algemene term T_n vir 'n rekenkundige ry : $\mathbf{T_n = a + (n - 1)d}$

bv. 3 Gegee die ry 4; 10; 16; . . .
a) Bepaal 'n formule vir die n^{de} term van die ry.
b) Bereken die 50^{ste} term.
c) Watter term van die ry is gelyk aan 310?

Oplossings

a) $a = 4$ en $d = 10 - 4 = 16 - 10 = 6$

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)\,d \\ &= 4 + (n-1)\,6 \\ &= 4 + 6n - 6 \\ &= 6n - 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} T_{50} &= 6 \times 50 - 2 \\ &= 300 - 2 \\ &= 298 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 6n - 2 &= 310 \\ 6n &= 312 \\ n &= 52 \end{aligned}$$

Aktiwiteit 1

1. Gegee die ry 6; 13; 20; …

a) Bepaal ’n formule vir die *n*de term van die ry.

b) Bereken die 21ste term van hierdie ry.

c) Bepaal watter term van hierdie ry is 97. (5)

2. Beskou hierdie getalpatroon: 8; 5; 2; …

a) Bereken die 15de term.

b) Bepaal watter term van hierdie ry is –289. (4)

3. **a)** Gegee die rekenkundige ry $1 - p; 2p - 3; p + 5; \ldots$ bepaal die waarde van p.

b) Bepaal die waardes van die eerste drie terme van die ry. (5)

[14]

Oplossings

1. **a)** Dit is ’n rekenkundige ry want daar is ’n gemene verskil.

$a = 6; d = 7 \quad T_n = a + (n-1)d$ ✓

$T_n = 6 + (n-1)(7)$

$T_n = 7n - 1$ ✓

b) $T_{21} = 7(21) - 1 = 147 - 1 = 146$ ✓

c) $97 = 7n - 1$ ✓

$\therefore 98 = 7n$

$\therefore 14 = n$ ✓

$\therefore 97$ is die 14de term van die ry. (5)

2. **a)** Dit is ’n rekenkundige ry: $a = 8; d = 5 - 8 = 2 - 5 = -3$

$T_n = a + (n-1)d$

$\therefore T_{15} = 8 + (15-1)(-3)$ ✓

$T_{15} = 8 + 14(-3)$

$T_{15} = 8 - 42 = -34$ ✓

b) $T_n = a + (n-1)d$

$-289 = 8 + (n-1)(-3)$ ✓

$\therefore -289 = 8 - 3n + 3$

$\therefore -300 = -3n$

$\therefore 100 = n$ ✓ $\quad \therefore -289$ sal die 100ste term wees (4)

3. **a)** Aangesien dit ’n rekenkundige ry is, kan jy aanneem dat daar ’n gemene verskil is tussen die terme.

$d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2$

$\therefore (2p - 3) - (1 - p) = (p + 5) - (2p - 3)$ ✓

$3p - 4 = -p + 8$ ✓

$4p = 12$

$p = 3$ ✓

b) $p = 3$

$T_1 = 1 - p = 1 - 3 = -2$

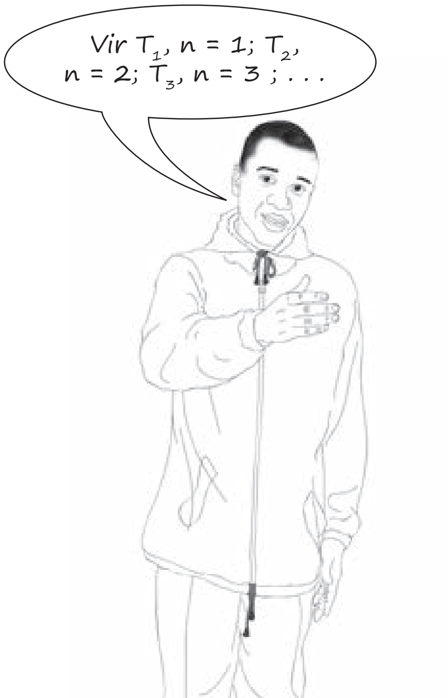
$T_2 = 2p - 3 = 2(3) - 3 = 3$ ✓

$T_3 = p + 5 = 3 + 5 = 8$ ✓

Dus is die eerste drie terme van die ry –2; 3; 8 (5)

[14]

3.3 Kwadratiese rye



Ons het ten minste vier getalle nodig om te bepaal of die ry kwadraties is of nie.

Beskou hierdie getalpatroon:

Daar is geen gemene verskil tussen die getalle nie.

Die verskille is 6; 10; 14; 18.

Nou kan ons sien dat daar 'n tweede gemene verskil is.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
	6	12	22	36	54
Eerste verskil	$(T_2 - T_1) = 6$	$(T_3 - T_2) = 10$	$(T_4 - T_3) = 14$	$(T_5 - T_4) = 18$	
Tweede verskil	$10 - 6 = 4$	$14 - 6 = 4$	$18 - 4 = 4$		

In hierdie ry is daar 'n tweede gemene verskil van 4.

Die volgende term sal wees: $T_6 = 54 + (18 + 4) = 76$

'n Patroon met 'n gemene tweede verskil word 'n **kwadratiese getallery** genoem.

Die algemene formule vir enige term van 'n kwadratiese ry is $T_n = an^2 + bn + c$

	$T_1 = a + b + c$	$T_2 = 4a + 2b + c$	$T_3 = 9a + 3b + c$	$T_4 = 16a + 4b + c$
1ste verskil	$3a + b$	$5a + b$	$7a + b$	
2de verskil	$2a$	$2a$		

As	$T_n = an^2 + bn + c$
dan is	$2a$ die tweede verskil
	$3a + b$ is $T_2 - T_1$
	$a + b + c$ is die eerste term

bv. **4** Kyk na die getallery 12; 20; 32; 48; . . .

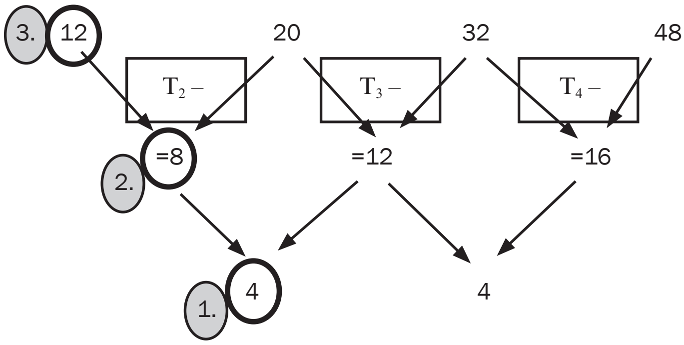
2de gemene verskil is 4
Dus $2a = 4$ $\therefore a = 2$

2. *$T_2 - T_1 = 8$*
Dus $3a + b = 8$ $\therefore 3(2) + b = 8$
$\therefore b = 2$

3. *1ste term is 12*
Dus $a + b + c = 12$ $\therefore 2 + 2 + c = 12$
$\therefore c = 8$

$\therefore T_n = 2n^2 + 2n + 8$

$\therefore T_5 = 2(5)^2 + 2(5) + 8 = 68$
$\therefore T_6 = 2(6)^2 + 2(6) + 8 = 92$



Aktiwiteit 2

1. Beskou die getalpatroon: 3; 13; 31; 57; 91; …

a) Bepaal die algemene term vir hierdie patroon.

b) Bereken die 7^de^ term van hierdie patroon.

c) Watter term is gelyk aan 241? (9)

2. Bepaal term 6 van hierdie patroon en bepaal die reël in die vorm $T_n = an^2 + bn + c$

-1 ; 3; 9; 17; 27 ... (4)

[13]

Oplossings

1. a) Dit help om 'n diagram te teken:

	T_1		T_2		T_3		T_4		T_5
	3		13		31		57		91
Eerste verskil		$(T_2 - T_1) = 10$		$(T_3 - T_2) = 18$		$(T_4 - T_3) = 26$		$(T_5 - T_4) = 34$	
Tweede verskil			$18 - 10 = 8$		$26 - 18 = 8$		$34 - 26 = 8$		

$\therefore$ dit is 'n kwadratiese ry

$2a = 8 \therefore a = 4$ ✓

$3a + b = 10 \quad \therefore 3(4) + b = 10$

$b = -2$ ✓

$a + b + c = 3 \quad \therefore 4 + (-2) + c = 3$

$c = 1$ ✓

$\therefore T_n = 4n^2 - 2n + 1$ ✓

b) $T_7 = 4(7)^2 - 2(7) + 1$ ✓

$= 4(49) - 14 + 1$

$= 183$ ✓

c) $241 = 4n^2 - 2n + 1$

$0 = 4n^2 - 2n + 1 - 241$ ✓ stel die vergelyking = 0 om op te los

$0 = 4n^2 - 2n - 240$

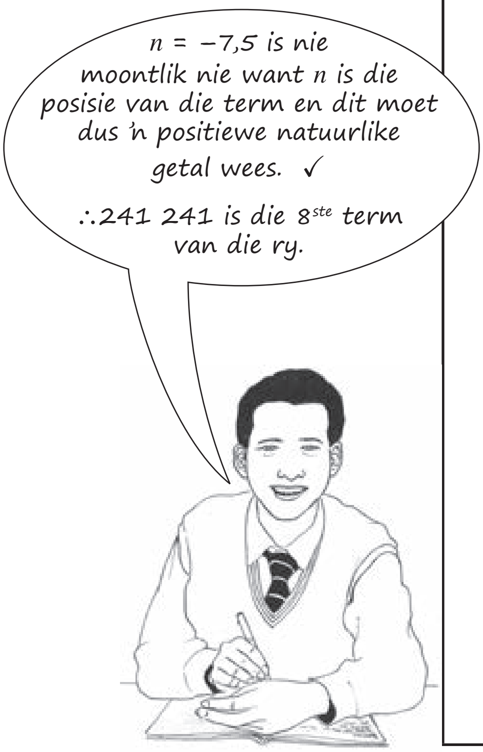
$0 = 2n^2 - n - 120$ deel deur 2

$0 = (2n + 15)(n - 8)$ ✓

faktoriseer

$\therefore 2n + 15 = 0$ OF $n - 8 = 0$

$\therefore n = -7{,}5$ OF $n = 8$ ✓ (9)



2. T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

-1 3 9 17 27 ...

4 6 8 10

2 2 2 ✓

$\therefore T_6 = 27 + (10 + 2) = 39$ ✓gebruik die patroon van die getalle

$2a = 2 \therefore a = 1$

$3a + b = 4$

$3(1) + b = 4 \therefore b = 1$

$a + b + c = -1$

$1 + 1 + c = -1 \therefore c = -3$

$T_n = n^2 + n - 3$ ✓✓ (4)

[13]

3.4 Meetkundige rye

Wanneer daar 'n **gemene verhouding** (**r**) tussen opeenvolgende terme is, kan ons sê dit is 'n **meetkundige ry.**

As die eerste term (T_1) a is, die gemene verhouding r is, en die algemene term T_n is, dan:

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_n}{T_{n-1}} \text{ en}$$
$$T_n = ar^{n-1}$$

Kyk na die ry 5; 15; 45; 135; 405; …

$\frac{15}{5} = 3$ $\frac{45}{15} = 3$ en $\frac{135}{45} = 3$ en dus is die gemene verhouding 3.

Daarom is die ry meetkundig. Om die volgende term te kry, moet jy die voorafgaande term met die gemene verhouding vermenigvuldig.

bv. 5

Gegee die ry $1; \frac{2}{3}; \frac{4}{9}; ...$

a) Bepaal die volgende twee terme
b) Watter term van die ry is gelyk aan $\frac{32}{243}$?

Oplossings

Die gemene verhouding is $\frac{2}{3}$ want $\frac{2}{3} \div 1 = \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$

a) $T_4 = ar^3 = 1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ en $T_5 = 1\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

b) $a = 1$; $r = \frac{2}{3}$ en $T_n = ar^{n-1} = \frac{32}{243}$

$\therefore T_n = (1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

$\therefore n - 1 = 5$

$n = 6$

bv. 6

In 'n meetkundige ry is die vyfde term 80 en die gemene verhouding –2. Bepaal die eerste drie terme van die ry.

$T_5 = 80$ en $r = -2$
$T_5 = ar^4 = a(-2)^4 = 80$
$16a = 80$
$a = 5$
$\therefore T_1 = 5$; $T_2 = 5(-2)^1 = -10$; $T_3 = 5(-2)^2 = 20$

Aktiwiteit 3

a) Bepaal die 10de term van die ry: 3; 6; 12; . . . (2)

b) Bepaal die aantal terme in die ry: 2; 4; 8; . . .; 1024 (2)

c) As 5; x; 45 die eerste drie terme van 'n meetkundige ry is, bepaal die waarde van x. (2)

d) Bepaal die meetkundige ry waarvan die 8ste term 9 is en die 10de term 25 is. (3)

[9]

Oplossings

a) $a = 3;\ r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$

$T_n = ar^{n-1}$

$T_{10} = 3(2)^{10-1} = 3(2)^9 = 3 \times 512 = 1536$ ✓✓ (2)

b) $a = 2;\ r = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

$ar^{n-1} = 1024$

$2(2)^{n-1} = 2^{10} = 2^n = 2^{10}$ ✓

$\therefore n = 10$ ✓ (2)

c) $\frac{x}{5} = \frac{45}{x}$ ✓

$x = \pm\sqrt{225} = \pm 15$ ✓ (2)

d) $ar^7 = 9$

$ar^9 = 25$

$\frac{ar^9}{ar^7} = \frac{25}{9}$

$\therefore r^2 = \frac{25}{9}$

$r = \frac{5}{3}$ ✓

$a = \frac{9}{\left(\frac{5}{3}\right)^7} = 9 \times \left(\frac{3}{5}\right)^7$ ✓

Die ry is: $9\left(\frac{3}{5}\right)^7; 9\left(\frac{3}{5}\right)^6; 9\left(\frac{3}{5}\right)^5; 9\left(\frac{3}{5}\right)^4; 9\left(\frac{3}{5}\right)^3$ ✓ (3)

[9]

3.5 Rekenkundige en meetkundige reekse

Wanneer ons die terme van 'n ry bymekaartel, vorm ons 'n reeks.

Ons gebruik die simbool S_n om die som van die eerste n terme van 'n reeks aan te toon.

Dus $\quad S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots + T_n$

3.5.1 Rekenkundige reekse

Die formule is $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ waar Sn die som is van n terme,
a is die eerste term,
n is die aantal terme en
d is die gemene verskil.

Bewys

Die algemene term van 'n rekenkundige reeks is $T_n = a + (n - 1)d$

Dus $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots + T_n$

$S_n = a + [a + d] + a + 2d + \ldots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d]$ …vergelyking 1

As ons die reeks omgekeerd skryf, kry ons:

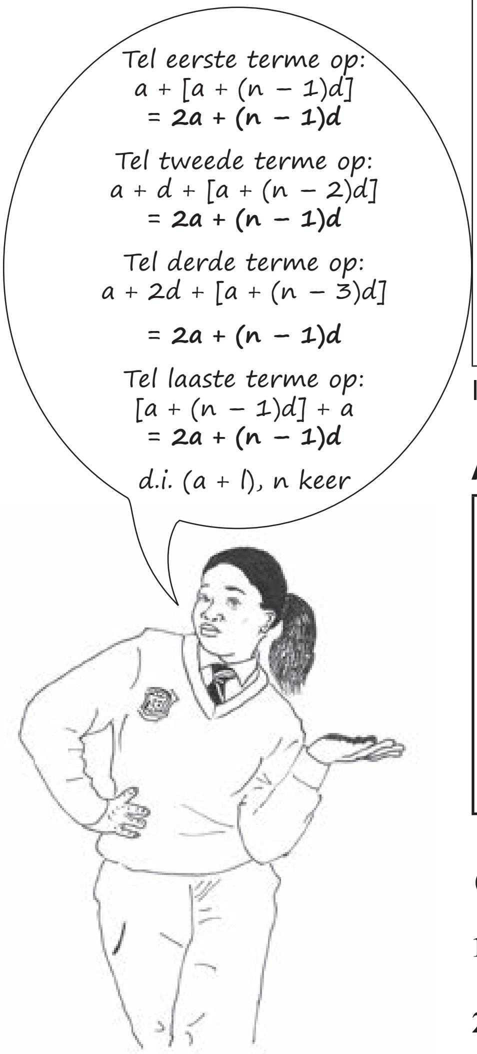
$S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 3)d] + \ldots + [a + d] + a$ … vergelyking 2

Ons kan vergelyking 1 en vergelyking 2 optel.

Dus $\quad 2S_n = [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \ldots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d]$

$2S_n = n[2a + (n - 1)d]$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$



In die finale eksamen word die formule op die **inligtingsblad** voorsien.

Alternatiewe bewys

Of $S_n = a + [a + d] + [a + 2d] + \ldots + [l - d] + l$ … vergelyking 1

Omgekeerd $S_n = [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 3)d] + \ldots + [a + d] + a$

$S_n = l + [l - d] + [l - 2d] + \ldots + [a + d] + a$ … vergelyking 2

Tel vergelyking 1 en vergelyking 2 op

$2S_n = [a + l] + [a + l] + \ldots + [a + l] \qquad n$ keer

$2S_n = n[a + l]$

$\therefore S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

bv. 7

1. Bepaal die som van die eerste 20 terme van die reeks:
   $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots$
2. Die som van die reeks $5 + 3 + 1 + \ldots$ is -216, bepaal die aantal terme in die reeks.

Oplossings

1. $a = 3$, $n = 20$, $d = 4$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{20} = \frac{20}{2}[2(3) + (19)4]$

$S_{20} = 10(6 + 76)$

$S_{20} = 820$

Die som van die eerste 20 terme is 820

2. $a = 5 \quad d = -2 \quad S_n = -216 \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \quad n = ?$

Vervang in die formule:

$-216 = \frac{n}{2}[2(5) + (n - 1)(-2)]$

$-216 = \frac{n}{2}[10 + -2n + 2]$

$-216 = \frac{n}{2}[12 - 2n]$

$-432 = 12n - 2n^2$

$-432 = -2n^2 + 12n$ …. Stel vergelyking = 0

$2n^2 - 12n - 432 = 0$ …. Deel deur 2 (gemeenskaplike faktor)

$n^2 - 6n - 216 = 0$ …. Faktoriseer trinoom

$(n - 18)(n + 12) = 0$

$\therefore n - 18 = 0$ of $n + 12 = 0$

$n = 18$ of $n = -12$

$n > 0 \quad \therefore n = 18$

$\therefore$18 terme van die reeks is saam –216.

Aktiwiteit 4

1. Bepaal die som van die reeks: 19 + 22 + 25 + . . . + 121 (3)

2. Die som van die reeks 22 + 28 + 34 + . . . is 1870. Bepaal die aantal terme. (2)

3. Gegee die rekenkundige reeks –3; 1; 5; …,393

a) Bepaal 'n formule vir die n^{de} term van die reeks.

b) Skryf die 4^{de}, 5^{de}, 6^{de} en 7^{de} terme van die reeks neer.

c) Skryf die res neer wanneer elkeen van die eerste sewe terme van die reeks deur 3 gedeel word.

d) Bereken die som van die terme in die rekenkundige reeks wat deelbaar is deur 3. (10)

4. Die som van n terme word gegee deur $S_n = \frac{n}{2}(1 + n)$. Bepaal T_5. (3)

5. $3x + 1$; $2x$; $3x - 7$ is die eerste drie terme van 'n rekenkundige reeks. Bereken die waarde van x. (3)

6. Die eerste en tweede terme van 'n rekenkundige reeks is onderskeidelik 10 en 6.

a) Bereken die 11^{de} term van die reeks.

b) Die som van die eerste n terme van hierdie reeks is –560. Bereken n. (6)

[27]

Oplossings

1. $a = 19$ en $d = 3$

$T_n = 3n + 16 = 121$

$3n = 105$

$n = 35$ ✓

$Sn = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_{35} = \frac{35}{2}(19 + 121) = \frac{35}{2}\overset{✓}{(140)} = 35 \times 70 = 2450$ ✓ (3)

2. $a = 22$ en $d = 6$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$\frac{n}{2}[2 \times 22 + (n - 1)6] = 1870$ ✓

$19n + 3n^2 = 1870$

$3n^2 + 19n - 1870 = 0$

$(3n + 85)(n - 22) = 0$ ✓

$\therefore n = 22$

n kan nie 'n negatief wees nie want dit is die aantal terme (2)

3. **a)** $T_n = -3 + (n - 1)4$ ✓

$4n - 7 = T_n$ ✓

b) $T_4 = 5 + 4 = 9$; $T_5 = 9 + 4 = 13$; ✓ $T_6 = 13 + 4 = 17$ *en*
$T_7 = 17 + 4 = 21$ ✓

c) 0; 1; 2; 0; 1; 2; 0 ✓✓

d) $T_n = -3 + 12(n - 1)$ ✓

$393 = 12n - 15$

$12n = 393 + 15 = 408$ ✓

$n = 34$

$S_{34} = \frac{34}{2} \times (-3 + 393)$

$= 17 \times 390$ ✓✓

$= 6630$ (10)

4. $S_5 = \frac{5}{2}(1 + 5) = 15$ ✓

$S_4 = \frac{4}{2}(1 + 4) = 10$ ✓

$T_5 = 15 - 10 = 5$ ✓ (3)

5. $T_2 - T_1 = T_3 - T_2$

$2x - (3x + 1) = (3x - 7) - 2x$ ✓

$2x - 3x - 1 = 3x - 7 - 2x$

$-2x + 6 = 0$ ✓

$2x = 6$

$x = 3$ ✓ (3)

6. a) $T_n = a + (n - 1)d$

$T_{11} = 10 + (11 - 1)(-4)$ ✓

$= -30$ ✓

b) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$-560 = \frac{n}{2}[2(10) + (n - 1)(-4)]$ ✓

$-1120 = -4n^2 + 24n$

$4n^2 - 24n - 1120 = 0$

$n^2 - 6n - 280 = 0$ ✓

$(n - 20)(n + 14) = 0$ ✓

$n = 20$ of $n = -14$

$n = 20$ alleenlik ✓ want die aantal terme kan nie ’n negatiewe getal wees nie (6)

[27]

3.5.2 Meetkundige reekse

Die formule is

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ vir $r > 1$ of $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ vir $r < 1$

Waar a die eerste term

r die gemene verhouding

n die aantal terme

S_n die som van die terme is

Bewys

Die algemene term van ’n meetkundige reeks is $T_n = ar^n - 1$

Dus $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots + T_n$

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$ vermenigvuldig elke term met r

$$\frac{\quad S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}{rS_n - S_n = -a + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + ar^n}$$

skryf die reeks weer neer met gelyksoortige terme onder mekaar

$\therefore rS_n - S_n = ar^n - a$ trek elke onderste term van die boonste term af

$S_n(r - 1) = a(r^n - 1)$ S_n en a is gemeenskaplike faktore

Dus $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ Deel regdeur deur $(r - 1)$

Ons kan ook $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ vir $r < 1$ gebruik.

bv. 8

Evalueer: 25 + 50 + 100 + … tot 6 terme

Oplossing

Ons moet eers kyk of hierdie ’n rekenkundige reeks of ’n meetkundige reeks is.

Jy behoort te sien dat daar ’n gemene verhouding van 2 is want $\frac{50}{25} = 2$ en $\frac{100}{50} = 2$

$r = 2$

$\therefore$ Dit is ’n meetkundige reeks en $a = 25$, $n = 6$, $r = 2$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$S_6 = \frac{25(1 - 2^6)}{1 - 2} \quad 2^6 = 64$$

$$S_6 = \frac{25(1 - 64)}{-1}$$

$$S_6 = \frac{25(-63)}{-1}$$

$$= 1\,575$$

Dus is die som van die eerste 6 terme van hierdie reeks gelyk aan 1 575.

Aktiwiteit 5

1. Bepaal 3 + 6 + 12 + 24 + . . . tot 10 terme. (2)
2. As 2 + 6 + 18 + . . . = bepaal die waarde van n. (3)

[5]

Oplossings

1. $a = 3$ *en* $r = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3(1024 - 1) = 3069 \ ✓ ✓$$ (2)

2. $a = 2$ en $r = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = 3$

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 728 \ ✓$$

$$\frac{2(3^n - 1)}{2} = 728$$

$$3^n - 1 = 728$$

$$3^n = 729 = 3^6 \ ✓$$

$$\therefore n = 6 \ ✓$$ (3)

[5]

3.5.3 Sigmanotasie

Hier is nog 'n nuttige manier om 'n reeks **voor te stel.**
Die som van 'n reeks kan in **sigmanotasie** geskryf word.
Die simbool "sigma" is 'n Griekse letter wat "die som van" verteenwoordig.

$\sum$ is die simbool vir "die som van"

$\sum_{k=1}^{n} T_k$ beteken "die som van die terme Tk vanaf $k = 1$ tot $k = n$.

Met ander woorde, $\sum_{k=1}^{n} T_k = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \ldots + T_n$

bv. 9

$$\sum_{k=3}^{17} p^k = p^3 + p^4 + p^5 + \ldots + p^{17}$$

Aktiwiteit 6

1. Evalueer: $\sum_{n=4}^{70} (2n - 4)$ (3)

2. Wat is die waarde van m waarvoor $\sum_{k=1}^{m} 5(3)^{k-1} = 65$? (4)

3. Beskou die reeks: $\frac{1}{2}; 4; \frac{1}{4}; 7; \frac{1}{8}; 10; \ldots$

a) As die patroon op dieselfde manier voortgaan, skryf die volgende TWEE terme in die reeks neer.

b) Bereken die som van die eerste 50 terme van die reeks. (5)

[12]

wenk
Soek twee verskillende reekse in die patroon en skei dit.

Oplossing

1. Die vraag vereis dat jy die som van die terme vanaf $n = 4$ tot $n = 70$ bepaal as die n^{de} term $2n - 4$ is.

$a = T_1 = 2(4) - 4 = 4$ Bepaal die eerste term a

$T_2 = 2(5) - 4 = 6$

$T_3 = 2(6) - 4 = 8$

Dus is die reeks gelyk aan 4; 6; 8; … en hierdie is 'n rekenkundige reeks. ✓

Om d te kontroleer, bereken $T_2 - T_1$

$d = T_2 - T_1 = 6 - 4 = 2$

$n = (70 - 4) + 1 = 67$ ✓ Daar is 67 terme

Nou kan ons hierdie waardes in die formule vervang om die som van 67 terme te bepaal.

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$S_{67} = \frac{67}{2}[2(4) + (67 - 1)2]$

$S_{67} = 33.5\,[8 + 132] = 4690$

So $\sum_{n=4}^{70} (2n - 4) = 4690$ ✓ (3)

2. Hierdie is 'n meetkundige reeks want $5(3)^{k-1}$ het die vorm ar^{k-1}, $T_1 = 5(3)^{1-1} = 5$;

$T_2 = 5(3)^{2-1} = 15$; $T_3 = 5(3)^{3-1} = 45$

$a = 5$; $r = 3$; $n = m$ en $S_m = 65$

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ ✓ … vervang

$65 = \frac{5(3^m - 1)}{3-1}$ ✓

$65 = \frac{5(3^m - 1)}{2}$ … vermenigvuldig regdeur met 2

$130 = 5.3^m - 5$ … tel gelyksoortige terme op

$135 = 5.3^m$ ✓ … deel regdeur deur 5

$27 = 3^m$ … skryf 27 as 'n mag van 3

$3^3 = 3^m$ … grondtalle is dieselfde, dus is die magte gelyk

$\therefore m = 3$ ✓ (4)

3. a) T_1, T_3 en T_5 vorm 'n reeks met 'n gemene verhouding van $\frac{1}{2}$, dus is T_7 gelyk aan $\frac{1}{16}$. ✓

T_2, T_4 en T_6 vorm 'n reeks met 'n gemene verskil van 3, dus is T_8 gelyk aan 13.

b) S_{50} = 25 terme van 1ste reeks + 25 terme van 2de reeks

$S_{50} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ tot 25 terme$) + (4 + 7 + 10 + 13 + \ldots$ tot 25 terme$)$ ✓

$S_{50} = \dfrac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} + \frac{25}{2}[2(4) + 24(3)]$ ✓

$S_{50} = 0{,}99999997 + 1\,000$ ✓

$S_{50} \approx 1\,001{,}00$ ✓ (5)

[12]

3.5.4 Oneindige meetkundige reeks

'n Oneindige reeks is een waarvan daar geen laaste term is nie, d.i. die reeks gaan aan sonder om te eindig.

bv. 10

$6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$

$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} 2(3)^{k-1} = 2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$ die som vanaf term 1 tot oneindigheid van $2(3)^{k-1}$

$T_1 = 2(3)^0 = 2$
$T_2 = 2(3)^1 = 6$
$T_3 = 2(3)^2 = 18$
$T_4 = 2(3)^3 = 54$ …

Die terme van hierdie reeks is almal positiewe getalle en die som sal groter en groter word sonder om te eindig. Dit word 'n **divergente** reeks genoem.

bv. 11

Kyk na hierdie oneindige reeks:

$S_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 1.5$

$S_3 = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4} = 1.75$

$S_4 = 1\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8} = 1.675$

$S_5 = 1\frac{7}{8} + \frac{1}{16} = 1\frac{15}{16} = \ldots..$

Hierdie reeks sal konvergeer na 2. Daarom word dit 'n konvergente reeks genoem en ons kan skryf die som tot oneindigheid is gelyk aan 2:$S_\infty = 2$

Jy kan 'n konvergente oneindige reeks identifiseer deur na die waarde r te kyk.

'n Oneindige reeks is konvergent as $-1 < r < 1,\ r \neq 0$

Die formule vir die som van 'n konvergerende oneindige reeks is $S_\infty = \frac{a}{1-r}$
waar a die eerste term en r die gemene verhouding is.
Hierdie formule word in die finale eksamen op die inligtingsblad verskaf.

bv. 12

1. Kyk weer na die voorbeeld waar $S_\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$a = 1$ en $r = \frac{1}{2}$ $\quad 0 < r < 1$

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \div \frac{1}{2}$

$S_\infty = 1 \times 2 = 2$

2. Vir watter waarde(s) van x sal $8x^2 + 4x^3 + 2x^4 + \ldots$ konvergent wees?

Vir konvergente meetkundige reeks, $-1 < r < 1$

$r = T_2 \div T_1$

$= 4x^3 \div 8x^2$

$= \frac{x}{2}$

$\therefore -1 < \frac{x}{2} < 1$ Vermenigvuldig regdeur met 2

$-2 < x < 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. x \neq 0$

Aktiwiteit 7

1. Bereken S_∞ as $\sum_{p=1}^{\infty} 8(4)^{1-p}$ (3)

2. As die reeks: $3(2x-3)^2 + 3(2x-3)^3 + 3(2x-3)^4 + \ldots$ gegee word, vir watter waardes van x sal die reeks konvergeer? (4)

3. Bepaal die waarde van m as: $\sum_{k=1}^{m} 3(2)^{k-1} = 93$ (4)

4. Vir watter waardes van x sal $\sum_{k=1}^{\infty} (4x-1)^k$ bestaan. (3)

[14]

Oplossings

1. $T_1 = 8(4)^{1-1} = 8 = a$ ✓

Om r te bepaal, bepaal die gemene verhouding met T_1 en T_2, T_2 en T_3.

$T_2 = 8(4)^{1-2} = 8(4)^{-1} = 8 \times \frac{1}{4} = 2$

$T_3 = 8(4)^{1-3} = 8(4)^{-2} = 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

$T_2 \div T_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ en $T_3 \div T_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Dus $r = \frac{1}{4}$ en $a = 8$ ✓

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{4}}$ ✓ Wanneer mens met 'n breuk deel, kan jy met die omgekeerde vermenigvuldig

$= 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

$\therefore S_\infty = \frac{32}{3}$ of $10\frac{2}{3}$ (3)

2. Hierdie is 'n meetkundige reeks met $r = 2x - 3$ ✓

Om te konvergeer $-1 < r < 1$ ✓

$-1 < 2x - 3 < 1$ Tel 3 aan albei kante by

$2 < 2x < 4$ Deel aan albei kante deur 2

$1 < x < 2$ ✓ $x \neq \frac{3}{2}$ ✓ (4)

Die reeks sal konvergeer vir $1 < x < 2$

3. $a = 3;\ r = 2;\ S_m = 93$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ✓

$93 = \frac{3(1-2^m)}{1-2}$ ✓

$93 = \frac{3(1-2^m)}{-1}$

$-93 = 3(1-2^m)$

$-31 = 1 - 2^m$

$2^m = 32$ ✓

$2^m = 2^5$

$\therefore m = 5$ ✓ (4)

4. $r = 4x - 1$ ✓

$-1 < r < 1$

$-1 < 4x - 1 < 1;$ $x \neq \frac{1}{4}$ ✓

$0 < 4x < 2$

$0 < x < \frac{1}{2}$ ✓ (3)

[14]

Wat jy moet kan doen:

- Bepaal die volgende paar terme in 'n gegewe ry.
- Identifiseer rekenkundige rye, kwadratiese rye en meetkundige rye.
- Pas kennis van rye en reekse toe om alledaagse probleme op te los.
- Bepaal die eerste verskil en die tweede gemene verskil in 'n kwadratiese ry.
- Bepaal die algemene term vir 'n ry.
- Weet hoe om die formules vir die som van rekenkundige of meetkundige reekse af te lei.
- Los probleme op met hierdie somformules.
- Werk met die som van oneindige meetkundige reekse wat konvergent is.

eksamen

Februarie/Maart 2014	Vraag 2; 3 en 4
November 2013	Vraag 2 en 3
Februarie/Maart 2013	Vraag 2 en 3
Februarie/Maart 2012	Vraag 2, 3 en 4
November 2012	Vraag 2, 3 en 4
November 2010	Vraag 2 en 3

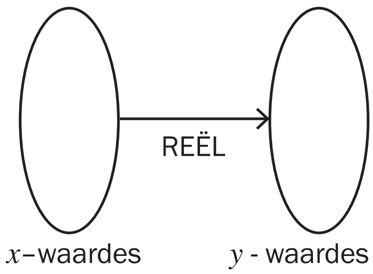
4 Eenheid

Funksies

4.1 Wat is 'n funksie?

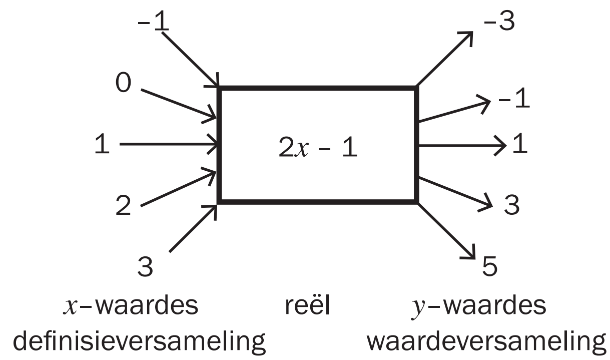
As 'n versameling x-waardes gegee word, kan die versameling y-waardes of antwoorde uitgewerk word wat mens kry deur die gegewe reël op elke x-waarde te gebruik.

Daar is dus 'n **verwantskap** tussen die x-waardes en die y-waardes wat deur die reël beskryf word



Die x-waardes is die insetwaardes en die y-waardes is die uitsetwaardes. In hierdie vloeidiagram is die reël $y = 2x - 1$

Dus vermenigvuldig ons elke x-waarde met 2 en trek 1 af om die ooreenstemmende y-waarde te bepaal.

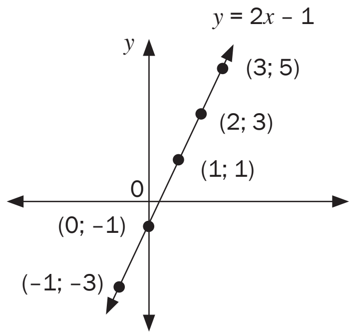


Die insetwaardes of x-waardes is die elemente van die **definisieversameling** van hierdie versameling en die uitsetwaardes of y-waardes is die elemente van die **waardeversameling** van hierdie versameling.

Ons kan hierdie waardes op die Cartesiese vlak stip.

As ons die definisieversameling uitbrei sodat $x \in \mathbb{R}$, kry ons die grafiek vir $y = 2x - 1$.

Kyk na die grafiek. Vir elke x-waarde op hierdie grafiek is daar slegs een y-waarde. As 'n reël of 'n formule slegs een y-waarde vir elke x-waarde gee, dan het ons 'n **funksie.**

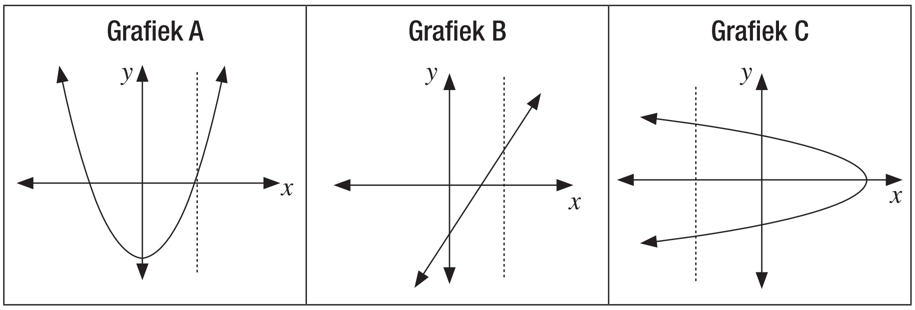


'n **Funksie** is 'n verwantskap tussen x en y, waar daar vir elke x-waarde slegs een y-waarde is.

Een manier om te besluit of 'n grafiek 'n funksie verteenwoordig of nie, is om die **vertikalelyntoets** te gebruik.

As enige lyn wat parallel aan die y-as getrek word, die grafiek net een keer sny, dan stel daardie grafiek 'n funksie voor.

bv. 1



Grafiek A en Grafiek B is funksies.

Grafiek C is nie 'n funksie nie want die vertikale lyn sny die grafiek twee keer. Dus is daar vir elke x-waarde op die grafiek twee y-waardes.

4.2 Funksienotasie

Ons gebruik funksienotasie $f(x)$ om aan te toon dat elke y-waarde 'n funksie van 'n x-waarde is.

Ons kan ook ander letters gebruik, soos $g(x)$, $h(x)$, ens.

Dus $y = 2x - 1$ kan geskryf word as $f(x) = 2x - 1$.

Die waarde van $f(x)$ vir enige x-waarde kan met substitusie uitgewerk word:

Byvoorbeeld, by $x = -3$ kan ons $f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$ bepaal

Dus lê die punt $(-3; -7)$ op die grafiek van $f(x) = 2x - 1$

Aktiwiteit 1

1. As $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ bepaal die waarde van $h(-4)$. (3)

2. As die funksie $g(x) = -x^2 - 3x$, bepaal $g(x + h)$ (2)

3. As $f(x) = 4x + 1$, bepaal die waarde van:

3.1 $f(x + a)$

3.2 $f(x) + a$

3.3 $af(x)$ (3)

4. As $g(x) = 2x^2$, bepaal die waarde van:

4.1 $g(-x)$

4.2 $-g(x)$ (2)

[10]

Oplossings

1. $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\therefore h(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ ✓ $(2^{-1})^{-4} = 2^4 = 16$ ✓

Dus wanneer $x = -4$, $y = 16$ en lê die punt $(-4; 16)$ op die grafiek van die funksie h. ✓ (3)

2. $g(x) = -x^2 - 3x$

$\therefore g(x + h) = -(x + h)^2 - 3(x + h)$ ✓ oral waar daar 'n x is, vervang dit met $(x + h)$

$= -(x^2 + 2xh + h^2) - 3x - 3h$

$= -x^2 - 2xh - h^2 - 3x - 3h$ ✓

Dit beteken dat wanneer $x = x + h$, is $y = -x^2 - 2xh - h^2 - 3x - 3h$ (2)

3.1 $f(x) = 4x + 1$

$f(x + a) = 4(x + a) + 1$

$= 4x + 4a + 1$ ✓

3.2 $f(x) = 4x + 1$

$f(x) + a = 4x + 1 + a$

✓

3.3 $f(x) = 4x + 1$

$af(x) = a(4x + 1)$

$= 4ax + a$ ✓

(3)

4.1 $g(x) = 2x^2$

$g(-x) = 2(-x)^2$

$= 2x^2$ ✓

4.2 $g(x) = 2x^2$

$-g(x) = -2x^2$ ✓

(2)

[10]

wenk

In elke voorbeeld is daar slegs een moontlike y-waarde vir elke x-waarde, dus is $f(x)$; $h(x)$ en $g(x)$ funksies.

4.3 Die basiese funksies, formules en grafieke

Belangrike terme om te onthou:

Definisieversameling: die versameling moontlike x-waardes

Waardeversameling: die versameling moontlike y-waardes

Simmetrie-as: 'n denkbeeldige lyn wat 'n grafiek in twee spieëlbeelde van mekaar verdeel

Maksimum: die grootste moontlike y-waarde van 'n funksie

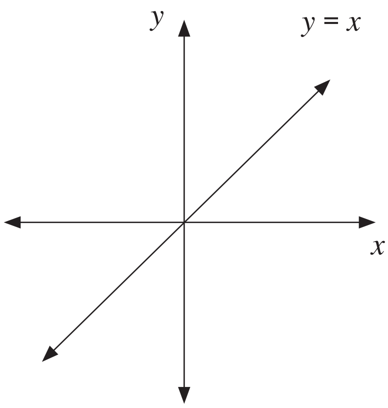
Minimum: die kleinste moontlike y-waarde van 'n funksie

Asimptoot: 'n denkbeeldige lyn wat 'n grafiek nader maar nooit raak nie

Draaipunt: die punt waar 'n grafiek sy maksimum- of minimumwaarde bereik en van rigting verander.

4.3.1 Die lineêre funksie (reguitlyn)

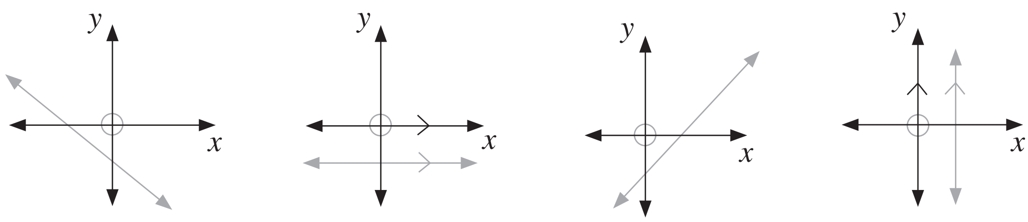
Lineêre funksies het die vorm $f(x) = ax + q$ waar a die **gradiënt** van 'n reguitlyngrafiek voorstel en q die y-afsnit voorstel waar $x = 0$.



Die grafiek van y is 'n reguitlyn met $a = 1$ en $q = 0$

Definisieversameling:: $x \in \mathbb{R}$
Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}$

Let ook op die vorm van die volgende lineêre funksies



$a < 0$ $q < 0$	$a = 0$ $y = q$	$a > 0$ $q < 0$	a is ongedefinieerd daar is geen q-waarde nie

SKETS DIE LINEÊRE FUNKSIE

Om die lineêre funksie te skets met die dubbele afsnitmetode:

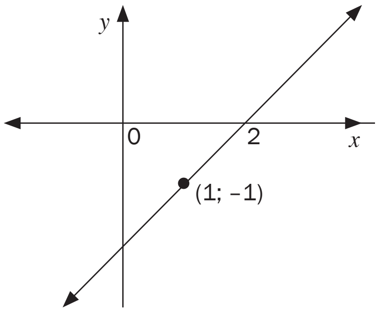
- Bepaal die x-afsnit (laat $y = 0$)
- Bepaal die y-afsnit (laat $x = 0$)
- Stip hierdie twee punte en trek 'n reguitlyn deur albei.

BEPAAL DIE VERGELYKING VAN 'N LINEÊRE FUNKSIE

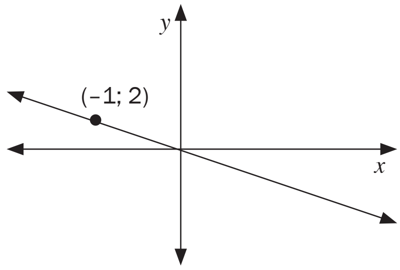
Om die vergelyking van 'n lineêre funksie te bepaal, volg die volgende stappe:
- Bepaal die gradiënt van die funksie.
- Vervang die waarde van die gradiënt in die algemene formule vir die lineêre funksie.
- Los op vir q.
- Skryf die vergelyking in die vorm $f(x) = ax + q$

bv. 2

1.



2.



Oplossings

1.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{-1-0}{1-2} \quad ✓ \; ✓$$
$$a = 1$$
$$\therefore y = 1x + c$$
$$0 = 1(2) + c$$
$$c = -2 \quad ✓$$
$$\therefore f(x) = x - 2$$

2.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{2-0}{-1-0} \quad ✓$$
$$a = -2$$
$$\therefore y = -2x + c$$
$$0 = -2(0) + c$$
$$c = 0 \quad ✓$$
$$\therefore f(x) = x - 2x$$

[5]

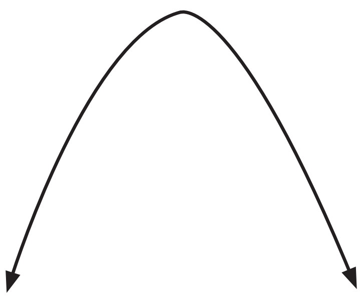
4.3.2 Die kwadratiese funksie (parabool)

'n **Kwadratiese funksie** is 'n **parabool** en kan met 'n algemene formule $y = ax^2 + bx + c$ of $y = a(x + p)^2 + q$ voorgestel word.

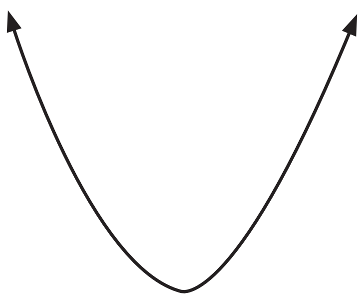
[EIENSKAPPE VAN 'N PARABOOL]

1. Vorm

$a < 0$



$a > 0$



2. Die grafiek het 'n simmetrie-as by $x = \frac{-b}{2a}$ of

3. Die funksie het een draaipunt gegee by $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

4. Die funksie kan óf 'n maksimum- óf 'n minimumwaarde hê, maar nooit albei nie.

5. **Definisieversameling:** $x \in \mathbb{R}$

   Waardeversameling: $y \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ of $y \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

SKETS DIE KWADRATIESE FUNKSIE

Om enige kwadratiese funksie te skets, volg die volgende stappe:

- Skryf die y-afsnit neer (laat $x = 0$)
- Om die x-afsnitte te bereken,
  - Skryf die vergelyking in die vorm $ax^2 + bx + c = 0$
  - Faktoriseer die linkerkant van die vergelyking.
  - Gebruik die feit dat as $(x - p)(x - q) = 0$, dan $x = p$ of $x = q$, om die x-afsnitte te bereken.
- Bepaal die simmetrie-as.
- Vervang die x-waarde van die simmetrie-as in die oorspronklike vergelyking van die funksie om die koördinate van die draaipunt te bereken.
- Stip die punte en teken die funksie vryhand.

bv. 3

Skets die grafiek van $f(x) = x^2 - 5x - 6$

1. ***y*-afsnit**

   $f(0) = -6$

   Daarom is die koördinate van die y-afsnit $(0; -6)$ ✓

2. ***x*-afsnit**

   $x^2 - 5x - 6 = 0$ ✓

   $(x - 6)(x + 1) = 0$ ✓

   $x = 6$ of $x = -1$ ✓

   $(6; 0)$ en $(-1; 0)$

3. **Simmetrie-as**

   $x = \frac{-b}{2a}$ ✓

   $= \frac{-(-5)}{2(1)}$ ✓

   $= \frac{5}{2}$ ✓

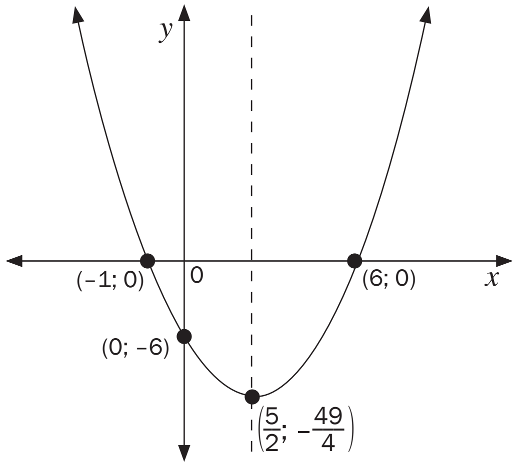
4. **Draaipunt**

   $f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) - 6$ ✓

   $= -12\frac{1}{4}$ ✓

   $\therefore DP\left(\frac{5}{2}; -12\frac{1}{4}\right)$ ✓

5. Sketsgrafiek



✓x-afsnitte ✓y-afsnit ✓vorm ✓draaipunt

Bepaal die vergelyking van 'n kwadratiese funksie

<table>
<tr><th>Gegee die x-afsnit en een punt</th><th>Gegee die draaipunt en een punt</th></tr>
<tr><td>

Gebruik die formule: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Vervang die waardes van die x-afsnitte.
Vervang die gegewe punte wat nie die x-afsnit is nie.
Los op vir a.
Skryf die vergelyking in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

</td><td>

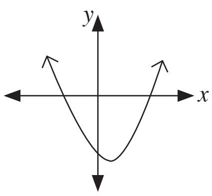
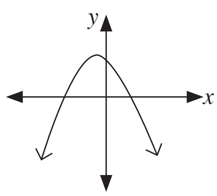
Gebruik die formule: $y = a(x + p)^2 + q$.
Vervang die koördinate van die draaipunt $(p; q)$.
Vervang die gegewe punt
Los op vir a.
Skryf die vergelyking in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ of $f(x) = ax^2 + bx + c$ afhangende van die instruksie in die vraag.

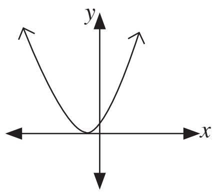
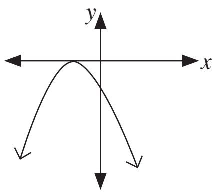
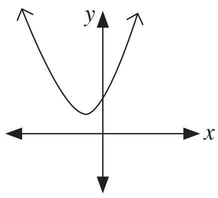
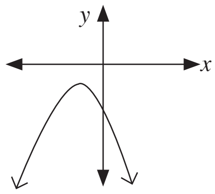
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Gegee die koördinate van drie punte op die parabool</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Gebruik die formule: $y = ax^2 + bx + c$.
Een van die gegewe punte is die y-afsnit, daarom is c gegee, vervang dus sy waarde.
Vervang die koördinate van die ander twee punte in $y = ax^2 + bx + c$.
Los die twee vergelykings gelyktydig op vir a en b.

</td></tr>
</table>

Aard van die wortels en die kwadratiese funksie

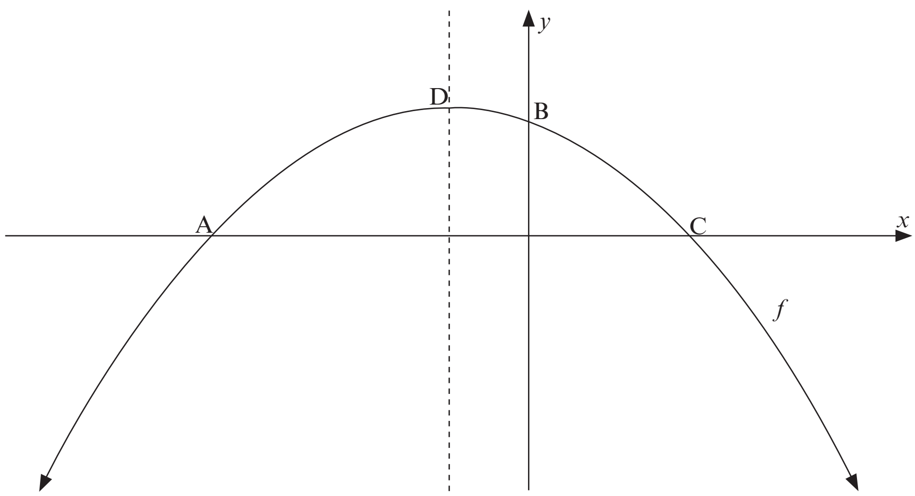
<table>
<tr><th>Aard van wortels</th><th>Kwadratiese funksie</th></tr>
<tr><td>Reële wortels
$\Delta > 0$</td><td> of 
NOTA: daar is twee x-afsnitte.</td></tr>
</table>

Gelyke wortels $\Delta = 0$	 of  NOTA: daar is slegs een x-afsnit.
Nie-reële wortels $\Delta > 0$	 of  NOTA: daar is geen x-afsnitte nie.

Aktiwiteit 2

Die skets verteenwoordig die grafiek van die parabool gegee deur $f(x) = 2 - x - x^2$.

Punt A, B en C is die afsnitte op die asse en D is die draaipunt van die grafiek.



1.1 Bepaal die koördinate van A, B en C. (4)

1.2 Bepaal die koördinate van die draaipunt D. (3)

1.3 Skryf die vergelyking van die simmetrie-asse van $f(x - 5)$ neer. (1)

1.4 Bepaal die waardes van x waarvoor $-f(x) \geq 0$. (2)

[10]

Oplossings

1.1 B(0; 2)

$2 - x - x^2 = 0$ ✓

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x - 1)(x + 2) = 0$ ✓

$x = 1$ of $x = -2$ ✓

A(–2; 0) en C(1; 0) ✓ (4)

1.2 $x = \frac{-b}{2a}$

$= \frac{-(-1)}{2(-1)}$ ✓

$= -\frac{1}{2}$ ✓

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

$D\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$ ✓ (3)

1.3 $x = \frac{9}{2}$ *of* $x = 4\frac{1}{2}$ ✓ (1)

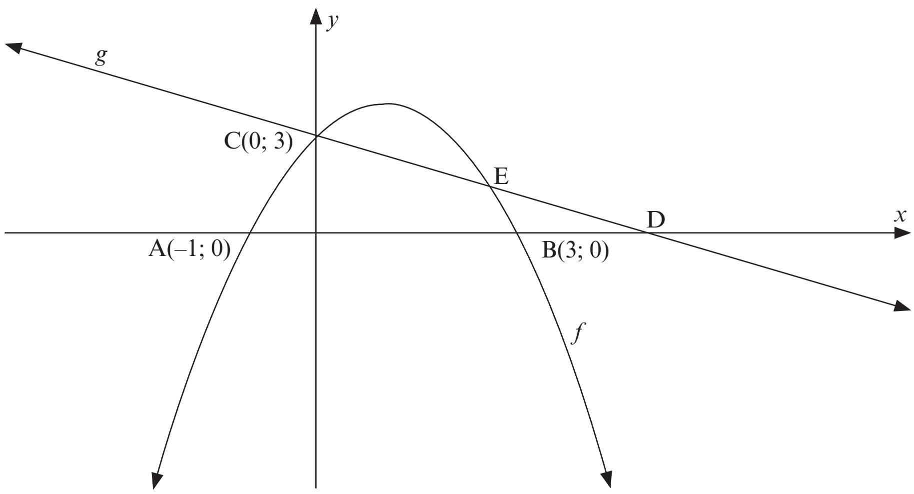
1.4 $x \leq -2$ ✓ *of* $x \geq 1$ ✓ (2)

[10]

Aktiwiteit 3

Die skets verteenwoordig die grafiek van die parabool gegee deur $f(x) = ax^2 + bx + c$ en die reguitlyn gedefinieer deur $g(x) = mx + c$

Punt A, B, C en D is die afsnitte op die asse. E is die snypunt van die twee grafieke.



2.1 Skryf die koördinate van punt D neer as D die beeld van B is nadat B twee eenhede na regs getransleer is. (1)

2.2 Bepaal die vergelyking van g. (3)

2.3 Bepaal die vergelyking van die funksie f in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. (4)

2.4 Bepaal die koördinate van E. (4)

2.5 Skryf die waardes van x neer waarvoor $f(x) \geq g(x)$. (2)

[14]

Oplossings

2.1 $D(5; 0)$ ✓ (1)

2.2 $g(x) = mx + 3$

$0 = m(5) + 3$ of $m_g = \frac{3-0}{0-5} = -\frac{3}{5}$ ✓

$m = -\frac{3}{5}$ ✓

$g(x) = -\frac{3}{5}x + 3$ ✓ (3)

2.3 $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$ ✓

$3 = a(0 + 1)(0 - 3)$ ✓

$a = 1$ ✓

$f(x) = -(x + 1)(x - 3)$

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ✓ (4)

2.4 $-\frac{3}{5}x + 3 = -x^2 + 2x + 3$ ✓

$x^2 - \frac{13}{5}x = 0$

$x\left(x - \frac{13}{5}\right) = 0$ ✓

$x = 0$ *of* $x = \frac{13}{5} = 2{,}60$ ✓

$g\left(\frac{13}{5}\right) = -\frac{3}{5}\left(\frac{13}{5}\right) + 3$

$= \frac{36}{25}$

$= 1{,}44$ ✓

$\therefore E\left(\frac{13}{5};\frac{36}{25}\right)$ *of* $E\left(2\frac{3}{5}; 1\frac{11}{25}\right)$ *of* $E\,(2{,}60; 1{,}44)$ (4)

2.5 $0 \leq x \leq \frac{13}{5}$ ✓✓ (2)

[14]

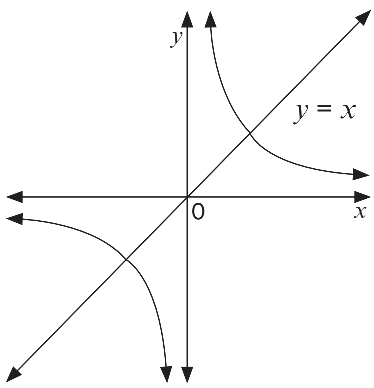
4.3.3 Die hiperboliese funksie

Hiperbool van die vorm $y = \frac{a}{x}$ of $xy = a$ waar $a \neq 0$; $x \neq 0$; $y \neq 0$.

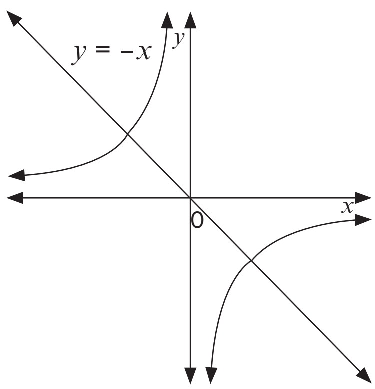
Eienskappe

Vorm

1. $a > 0$



$a < 0$



2. (i) Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$
   (i) Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}; y \neq 0$
3. Die horisontale asimptoot van die x-as
4. Die vertikale asimptoot van die y-as
5. As $a < 0$, lê die grafiek in die 2de en 4de kwadrant.
6. As $a > 0$, lê die grafiek in die 1ste en 3de kwadrant.
7. Die simmetrielyne is $y = x$ en $y = -x$.

SKETS DIE HIPERBOOL VAN DIE VORM:

$y = \frac{a}{x}$ of $xy = a$

- Die grafiek sny nie die x-as en die y-as nie (asimptote)
- Gebruik die tabel en beskou beide die negatiewe en positiewe x-waardes
- a bepaal twee kwadrante waar die grafiek getrek sal word.

Aktiwiteit 4

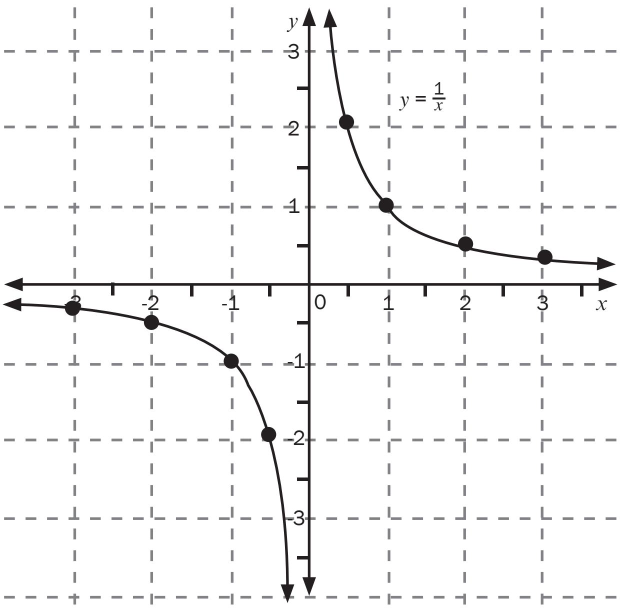
1. Skets die grafiek van $y = \frac{1}{x}$ deur punte te stip. Beskryf die hoofkenmerke van die grafiek. (4)

Oplossing

$a = 1$

$a > 0$, Die grafiek lê in die 1ste en 3de kwadrant

-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	ongedefinieerd	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



- Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ ✓
- Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}; y \neq 0$ ✓
- Asimptote: $x = 0$ en $y = 0$ ✓
- Simmetrielyne $y = x$ en $y = -x$ ✓ (4)

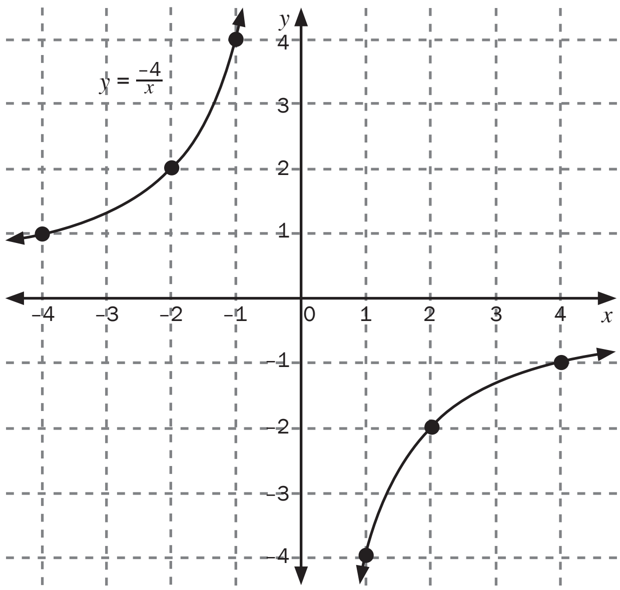
2. Skets die grafiek van $y = \frac{-4}{x}$ deur die punte te stip. Beskryf die hoofkenmerke van die grafiek. (4)

Oplossing

$a = -4$

$a < 0$, Die grafiek lê in die 2de en 4de kwadrant

-4	-2	-1	0	1	2	4
1	2	4	ongedefinieerd	-4	-2	-1



- Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ ✓
- Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}; y \neq 0$ ✓
- Asimptote: $x = 0$ en $y = 0$ ✓
- Simmetrielyne $y = x$ en $y = -x$ ✓ (4)

[8]

4.3.4 Die hiperbool

Hiperbole in die vorm $y = \frac{a}{x} + q$ is die translasie van die grafiek van $y = \frac{a}{x}$ vertikaal met q eenhede.

Die horisontale asimptoot (x-as) sal ook vertikaal (op of af) met q eenhede skuif.

Aktiwiteit 5

1. Beskou die funksie $y = \frac{1}{x} - 2$

1.1 Bepaal:

a) die vergelykings van die asimptote

b) die koördinate van die x-afsnitte

1.2 Skets die grafiek

1.3 Skryf neer:

a) die definisieversameling en die waardeversameling

b) die simmetrielyne $y = x + c$ and $y = -x + c$

(10)

Oplossings

1.1

a) Die horisontale asimptoot is $y = -2$ aangesien die grafiek 2 eenhede afgeskuif het en die vertikale asimptoot is $x = 0$ ✓ Die noemer kan nie gelyk wees aan nul nie.

b) Vir x-afsnitte, laat $y = 0$

$0 = \frac{1}{x} - 2$ ✓

$0 = 1 - 2x$ (vermenigvuldig met KGN wat x is)

$2x = 1$ ✓

$x = \frac{1}{2}$ ✓

$\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

2. Beskou die funksie $f(x) = \frac{-4}{x} + 1$

2.1 Bepaal:

a) die vergelykings van die asimptote

b) die koördinate van die x-afsnitte

2.2 Skets die grafiek

2.3 Skryf die definisieversameling en die waardeversameling neer

2.4 As die grafiek van f weerspieël word deur die lyn wat die vergelyking $y = -x + c$ halveer, val die nuwe grafiek saam met die grafiek van $f(x)$.

Bepaal die waarde van c.

(9)

Oplossings

2.1

a) Die horisontale asimptoot is $y = 1$ ✓ aangesien die grafiek 1 eenheid opgeskuif het en die vertikale asimptoot is $x = 0$. Die noemer kan nie gelyk wees aan nul nie.

b) Vir x-afsnitte, laat $y = 0$

$0 = \frac{-4}{x} + 1$ ✓

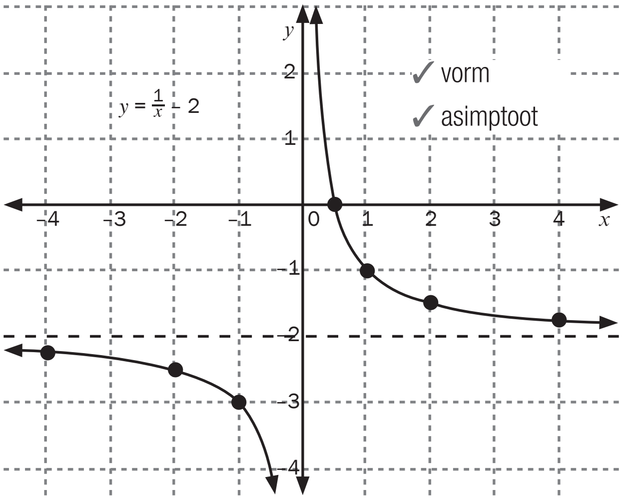
$0 = -4 + x$ (vermenigvuldig met KGN wat x is)

$x = 4$ ✓

$(4; 0)$

1.2

x	–4	–2	–1	0	1	2	4
y	$-2\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{2}$	–3	ongedefinieerd	–1	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{4}$



1.3

a) Definisieversameling $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ ✓

Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}; y \neq 2$ ✓

b) $y = x$ en $y = -x$

transleer 2 eenhede af en daarom

$y = x - 2$ en $y = -x - 2$ ✓

$\therefore c = -2$

Of vervang (0; 2) snypunt van die twee asimptote in

$y = x + c$ of $y = -x + c$

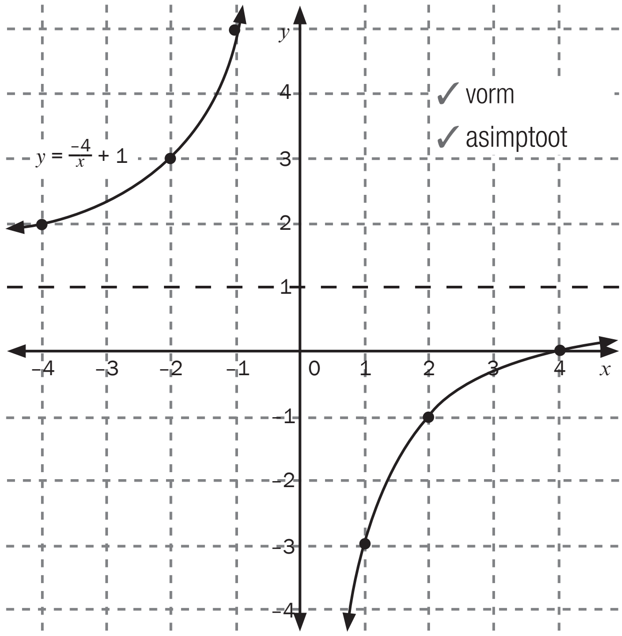
En bereken die waarde van c.

[10]

wenk Vergelyk hierdie grafiek met die een in aktiwiteit 4 (a)

2.2

x	–4	–2	–1	0	1	2	4
y	2	2	5	ongedefinieerd	–3	–1	0



2.3 Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}; y \neq 0$ ✓

Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}; y \neq 1$ ✓

2.4 Die asimptote is

$x = 0$ en $y = 1$

$y = -x + c$

$1 = -(0) + c$

$1 = c$

lyne is $y = -x + 1$ en $y = x + 1$ ✓

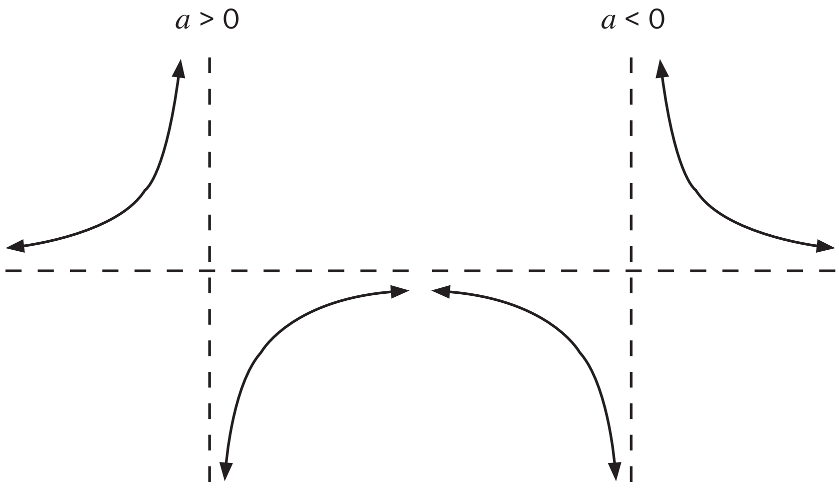
[9]

wenk Vergelyk hierdie grafiek met die een in aktiwiteit 4 (b)

4.3.5 Hiperbool van die vorm

$y = \frac{a}{x+p} + q$ waar $a \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

1. Vorm



Die stippellyne is die asimptote.

2. Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$; $x \neq -p$.
Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}$; $y \neq q$

3. Die **horisontale asimptoot** is $y = q$

4. Die **vertikale asimptoot** is $x + p = 0 \therefore x = -p$

5. Die simmetrielyne is $y = x + c$ en $y = x + c$

bv. 4

Beskou $g(x) = \frac{8}{x-2} -3$ met die horisontale asimptoot by $y = -3$ en $x - 2 \neq 0 \therefore x \neq 2$ want as $x = 2$ is die uitdrukking $\frac{8}{x-2}$ se noemer $\frac{8}{2-2} = \frac{8}{0}$ wat ongedefinieerd is want die noemer is nul.

Dus is die grafiek ongedefinieerd vir $x - 2 = 0 \therefore x = 2$ is die **vertikale asimptoot**.

Die grafiek $y = \frac{8}{x}$ skuif 2 eenhede regs en 3 eenhede af van die grafiek $g(x) = \frac{8}{x-2} - 3$

SKETS DIE HIPERBOOL VAN DIE VORM

$y = \frac{a}{x+p} + q$

- Skryf die asimptote neer.
- Teken die asimptote op die assestelsel as stippellyne
- Gebruik a om te bepaal in watter twee kwadrante die grafiek getrek word
- Bepaal die x-afsnit(te), laat $y = 0$
- Bepaal die y-afsnit(te), laat $x = 0$
- Stip die punte en teken dan die grafiek vryhand.

Aktiwiteit 6

1. Beskou die funksie $f(x) = \frac{2}{x-3} + 1$

a) Skryf die vergelykings van die asimptote van f neer. (2)

b) Bereken die koördinate van die x- en y-afsnitte van f. (4)

c) Skryf die definisieversameling en die waardeversameling neer. (2)

d) Skets die grafiek van f duidelik en toon ALLE asimptote en afsnitte met die asse aan. (3)

2. Beskou die funksie $f(x) = \frac{3}{x-1} - 2$

a) Skryf die vergelykings van die asimptote neer. (2)

b) Bereken die koördinate van die afsnitte van die grafiek van f met die asse. (3)

c) Skets die grafiek van f duidelik en toon ALLE asimptote en afsnitte met die asse aan. (3)

d) Skryf die waardeversameling van $y = -f(x)$ neer. (1)

e) Beskryf, in woorde, die transformasie van f na g as $g(x) = \frac{-3}{x+1} - 2$ (2)

[22]

Oplossing

1. a) $x = 3$ en $y = 1$ ✓✓ (2)

b) $f(x) = \frac{2}{x-3} + 1$

y-afsnit $y = \frac{2}{0-3} + 1 = \frac{1}{3}$ ✓

$\left(0; \frac{1}{3}\right)$

x-afsnit $0 = \frac{2}{x-3} + 1$ ✓

✓

$0 = 2 + 1(x - 3)$

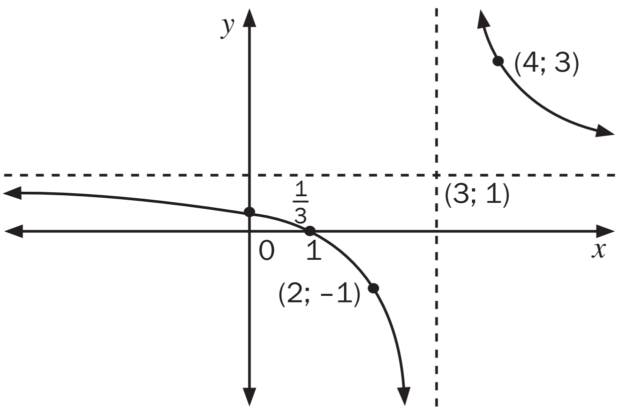
$0 = 2 + x - 3$

✓ $x = 1$ $\therefore (1; 0)$ (4)

c) Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}; x \neq 3$ ✓

Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}; y \neq 1$ ✓ (2)

d) $a > 0$



✓ afsnitte ✓ asimptote ✓ vorm (3) **[11]**

Oplossing

2. a) ✓ $x = -1$ $y = -2$ ✓ (2)

b) y – afsnit

$y = \frac{3}{0-1} - 2 = -5$

$(0; -5)$ ✓

x – afsnit ✓ $0 = \frac{3}{x-1} - 2$

$2 = \frac{3}{x-1}$

$2(x - 1) = 3$

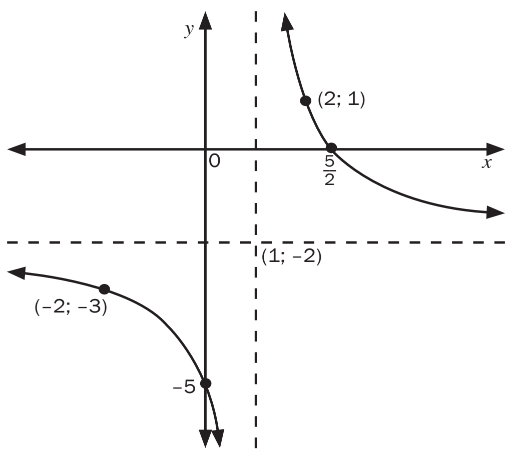
$2x - 2 = 3$

$2x = 5$

✓ $x = \frac{5}{2}$

$\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ (3)

c) $a > 0$



✓ afsnitte ✓ asimptote ✓ vorm (3)

wenk

In die grafiek 1 (d) is die punte (4; 3), $x = 4$ gekies want dit het x-koördinate groter as $x = 3$ wat die vertikale asimptoot is. Die punt (2; –1) is gekies want dit het 'n x-koördinaat van $x = 2$ wat minder is as $x = 3$, die vertikale asimptoot. Hierdie punte kan ook gebruik word om te bepaal in watter kwadrante die grafiek getrek moet word. Die punte (2; 1) en (–2; –3) op grafiek 2 (iii) is op 'n soortgelyke manier gekies.

d) $f(x) = \frac{3}{x-1} - 2$

$-f(x) = -\left(\frac{3}{x-1} - 2\right)$

$-f(x) = \frac{-3}{x-1} + 2$

Waardeversameling: $y \in \mathbb{R}; y \neq 2$ ✓ (1)

e) $g(x) = \frac{-3}{x+1} - 2$

$g(x) = \frac{3}{-x-1} - 2$

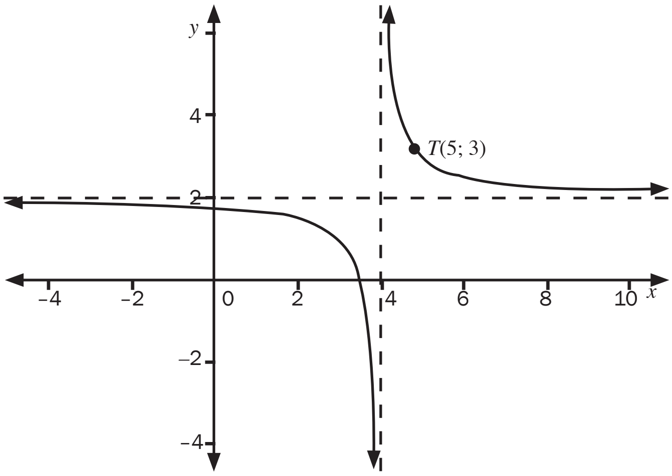
Aangesien x negatief is, ✓

is hierdie die weerspieëling van f in die y-as. ✓ (2)

[11]

Aktiwiteit 7

Die diagram hieronder verteenwoordig die grafiek van $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$. T(5; 3) is 'n punt op f.



4.1 Bepaal die waardes van a, p en q. (4)

4.2 As die grafiek van f in die lyn met die vergelyking $y = -x + c$ weerspieël word, val die nuwe grafiek saam met die grafiek van $y = f(x)$. Bepaal die waarde van c. (3)

[7]

Oplossings

4.1 ✓$p = 4$ en $q = 2$ ✓deur die asimptote te gebruik

Vervang T(5; 3) in $y = \frac{a}{x-4} + 2$

$3 = \frac{a}{5-4} + 2$ ✓ $3 = a + 2$ $a = 1$ ✓ (4)

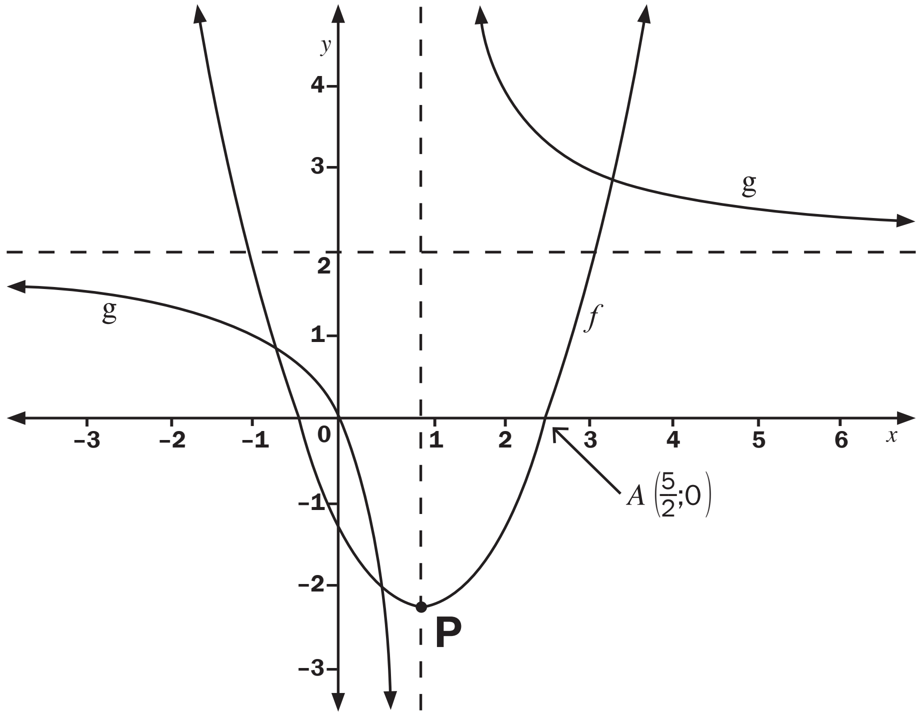
4.2 Vervang (4; 2) ✓ in $y = -x + c$

✓$2 = -(4) + c$ $\therefore c = 6$ ✓ (3)

[7]

Aktiwiteit 8

Hieronder is die grafieke van $f(x) = (x + p)^2 + q$ en $g(x) = \frac{a}{x+b} + c$ geskets. A $\left(2\frac{1}{2};\ 0\right)$ is 'n punt op die grafiek van f. P is die draaipunt van f. Die asimptote van g word voorgestel deur die stippellyne. Die grafiek van g gaan deur die oorsprong.



5.1 Bepaal die vergelyking van g. (4)
5.2 Bepaal die koördinate van P, die draaipunt van f. (4)
5.3 Skryf die vergelyking van die asimptote van $g(x – 1)$ neer. (2)
5.4 Skryf die vergelyking van h neer, as h die beeld van f is wat in die x-as weerspieël word. (1)

[11]

Oplossings

5.1 Gebruik die asimptote ✓$b = 1$ en $c = 2$ ✓

Vervang (0; 0) in $y = \frac{a}{x-1} + 2$

✓$0 = \frac{a}{0-1} + 2 \quad \Rightarrow 0 = -a + 2 \quad \therefore a = 2$ ✓

$y = \frac{2}{x-1} + 2$ (4)

5.2 Simmetrie-as $p = 1$ ✓

$f(x) = (x – 1)^2 + q$

$\left(\frac{5}{2};0\right)$ ✓

✓$0 = \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + q$

$0 = \frac{9}{4} + q$

$q = -\frac{9}{4} \quad \therefore P\left(1;-\frac{9}{4}\right)$ ✓ (4)

5.3 $g(x) = \frac{2}{x-1} + 2$

$g(x-1) = \frac{2}{(x-1)-1} + 2$ vervang x met $(x - 1)$

$g(x-1) = \frac{2}{x-2} + 2$

✓ $x = 2$ en $y = 2$ ✓ (2)

5.4 $f(x) = (x-1)^2 - \frac{9}{4}$

Weerspieëling in die x-as y verander die teken

$-y = (x-1)^2 - \frac{9}{4}$

$y = -\left[(x-1)^2 - \frac{9}{4}\right]$

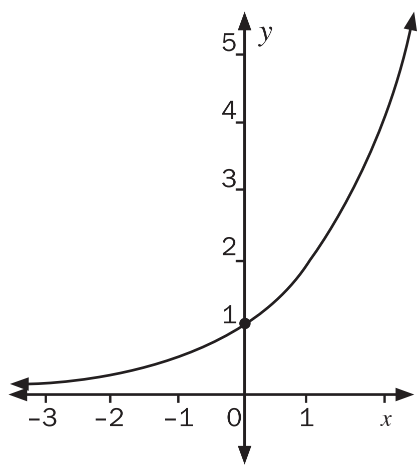
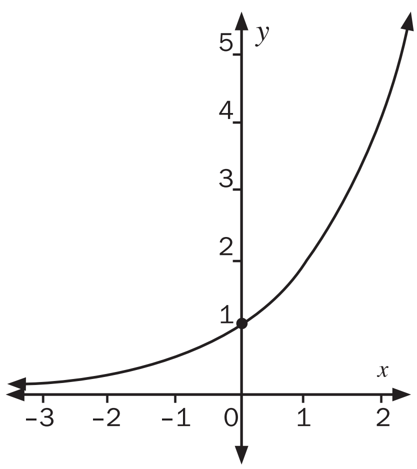
$y = -(x-1)^2 + \frac{9}{4}$ ✓ (1)

[11]

4.3.6 Die eksponensiaalfunksie

'n **Eksponensiaalfunksie** kan voorgestel word met 'n algemene formule $y = ab^{x+p} + q$; $b > 0$

Vorm en eienskappe van 'n eksponensiaalfunksie

$y = b^x$; $b > 1$	$y = b^x$; $0 < b > 1$
	
• Die grafiek loop deur die punt (0; 1). • Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$ • Waardeversameling: $y > 0$ maar vir $y + b^x + q$, sal die waardeversameling by $y > q$ wees. • Die grafiek is glad, aaneenlopend en 'n **toenemende** funksie. • Asimptote is by $y = 0$ maar vir $y = b^x + q$, sal die horisontale asimptoot by $y = q$ wees.	• Die grafiek loop deur die punt (0; 1). • Definisieversameling: $x \in \mathbb{R}$ • Waardeversameling: $y > 0$ maar vir $y = b^x + q$, sal die waardeversameling by $y > q$ wees. • Die grafiek is glad, aaneenlopend en 'n **afnemende** funksie. • Asimptote is by $y = 0$ maar vir $y = b^x + q$, sal die horisontale asimptoot by $y = q$ wees.
NOTA: Die twee funksies is 'n weerspieëling van mekaar in die y-as.	

bv. 5

Gegee: $f(x) = 2^x$

1.1 Teken die grafiek van $f(x) = 2^x$, toon ten minste drie punte op die skets aan.

1.2 Teken, op dieselfde assestelsel, die grafiek van f^{-1}, die inverse van f.

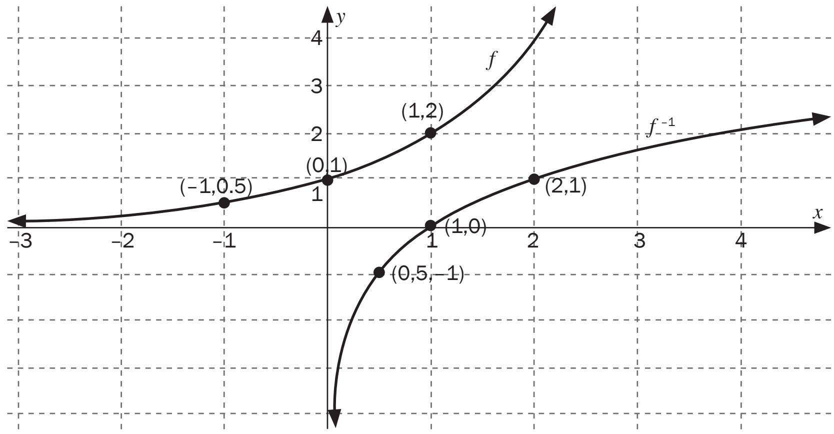
1.3 Skryf die vergelyking van f^{-1} in die vorm $y = ...$

Oplossings

1.1 Trek eers die tabel:

x	–1	0	1
$f(x)$	0,5	1	2

Stip dan die punte en trek die grafiek.



1.2 Die skets van f^{-1} word verkry deur die x- en y-koördinate van f om te ruil.

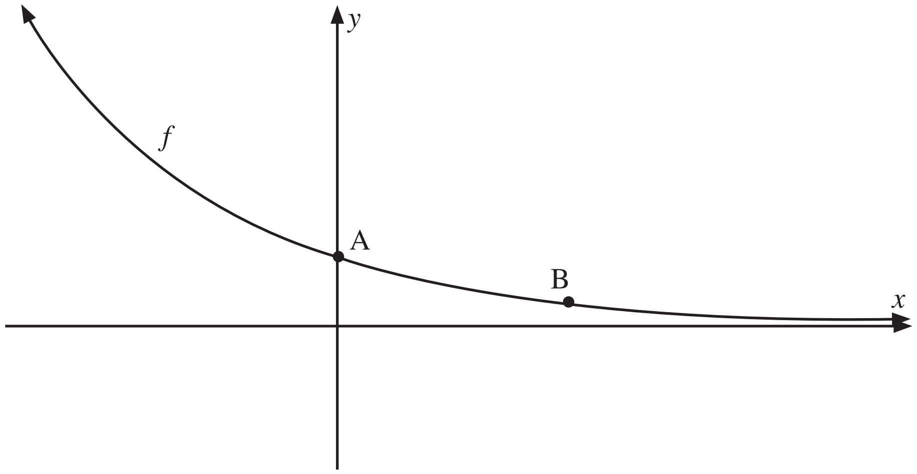
1.3 $y = 2^x$

$x = 2^y$ ✓

$y = \log_2 x$ ✓ **[2]**

bv. 6

Die skets verteenwoordig die grafiek gegee deur $f(x) = a^x$.



2.1 Skryf die koördinate van die punt A neer. (1)
2.2 Hoe kan mens sê dat $0 < a < 1$? (1)
2.3 Bepaal a indien B die punt $\left(3; \frac{1}{27}\right)$ is. (2)
2.4 Bepaal die vergelyking van die grafiek wat gekry word as f in die y-as weerspieël word. (2)
2.5 Wat is die koördinate van die snypunt van die twee grafieke? (1)
[7]

Oplossings

2.1 A(0; 1) ✓

2.2 Want die grafiek is 'n afnemende funksie. ✓

2.3
$$f(x) = a^x$$
$$\frac{1}{27} = a^3 \quad ✓$$
$$(3^{-1})^3 = a^3$$
$$a = \frac{1}{3} \quad ✓$$

2.4 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ word $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ ✓

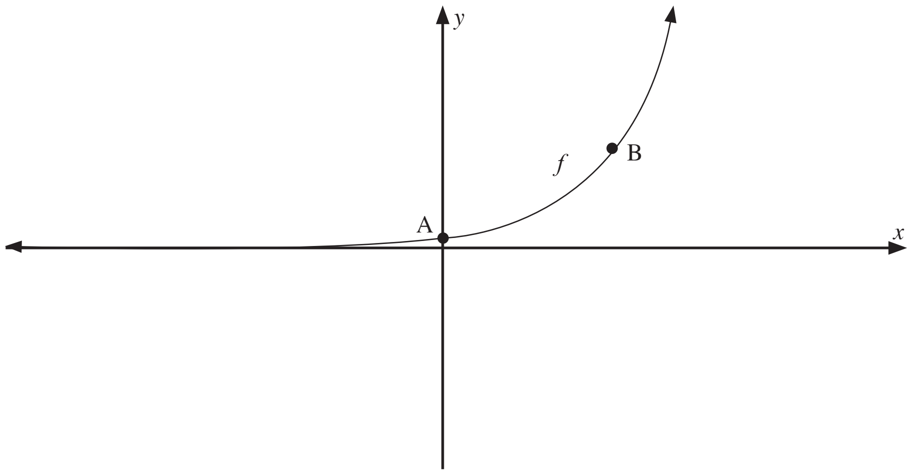
$\therefore y = (3^{-1})^{-x}$

$y = 3^x$ ✓

2.5 (0; 1) ✓ **[7]**

Aktiwiteit 9

Die kromme van 'n eksponensiaalfunksie word gegee deur $f(x) = k^x$ en sny die y-as by A (0; 1) terwyl B $\left(2;\frac{9}{4}\right)$ op die kromme lê.



Bepaal

1.1 die vergelyking van die funksie f. (3)

1.2 die vergelyking van die asimptote van h as $h(x) = -f(x)$. (2)

1.3 die waardeversameling van h. (1)

1.4 die vergelyking van die funksie g waarvan die kromme die weerspieëling is van die kromme van f in die lyn $y = x$. (2)

Oplossings

1.1 $f(x) = k^x$

$\frac{9}{4} = a^2$ ✓

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = a^2$ ✓

$a = \frac{3}{2}$ ✓ $\quad \therefore f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (3)

1.2 $y = 0$ ✓✓ (2)

1.3 $y \leq 0$ ✓ (1)

1.4 $g(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$ ✓✓ (2)

[8]

4.4 Inverse funksies

- Die inverse van 'n funksie neem die y-waardes (waardeversameling) van die funksie na die ooreenstemmende x-waardes (definisieversameling) en omgekeerd. Daarom word die x- en y-waardes omgeruil.
- Die funksie word in die lyn $y = x$ weerspieël om die inverse te vorm.
- Die notasie vir die inverse van 'n funksie is f^{-1}.

bv. 7

Gegee $f(x) = 2x + 6$.

1. Bepaal $f^{-1}(x)$

2. Skets die grafieke van $f(x)$, $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

Oplossings

1. Om die inverse van 'n funksie te bepaal, is daar twee stappe:

STAP 1: Ruil die x en y om

$y = 2x + 6$ ✓

word $x = 2y + 6$ ✓

Skryf dan die vergelyking oor om y die onderwerp van die formule te maak. Dus,

STAP 2: maak y die onderwerp van die formule

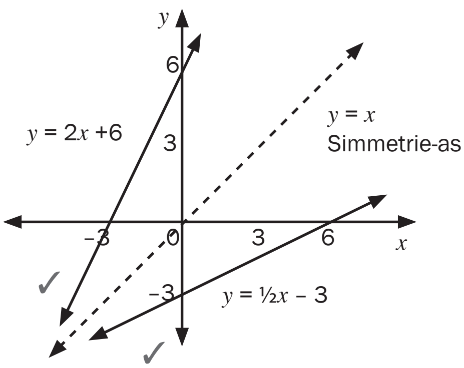
$x = 2y + 6$

$x - 6 = 2y$ ✓

Dus $y = \frac{1}{2}x - 3$ ✓

Ons kan sê die inverse funksie is $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

2.



- Elke punt op die funksie het dieselfde koördinate as die ooreenstemmende punt op die inverse funksie, *behalwe dat hulle omgeruil het*.
- Byvoorbeeld: (–3; 0) op die funksie word weerspieël om (0; –3) op die inverse te word.
- Enige punt (a; b) op die funksie word die punt (b; a) op die inverse.
- Om die vergelyking van 'n inverse funksie algebraïes te bepaal, ruil x en y om en los dan vir y op.
- Om die grafiek van die inverse funksie te trek, weerspieël ons die oorspronklike grafiek in die lyn $y = x$, die simmetrie-as van die twee grafieke.

bv. 8

1. a) Skets $f(x) = 2x^2$

b) Bepaal die inverse van $f(x)$

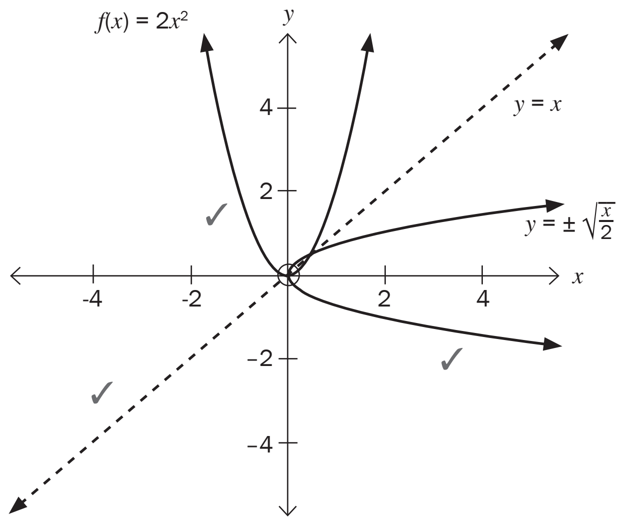
c) Skets $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel as $f(x)$

Oplossing

1. b) $y = 2x^2$

$x = 2y^2$ ✓

$y = \pm\sqrt{\frac{x}{2}}$ ✓



- Hierdie is nie 'n funksie nie.
- Kontroleer dit met 'n vertikalelyntoets. Daar is twee y-waardes vir een x-waarde.
- Nie alle inverses van funksies is ook funksies nie. Party inverses van funksies is relasies.
- As 'n inverse nie 'n funksie is nie, kan ons die **definisieversameling** van die **funksie** beperk sodat die inverse ook 'n funksie kan wees.
- Om die inverse 'n funksie te maak, moet ons 'n versameling x-waardes in die funksie kies en slegs met daardie waardes werk. Ons noem dit "**beperk die definisieversameling**".
- 'n Een-tot-een-funksie het 'n inverse wat 'n funksie is. Byvoorbeeld: $y = 3x + 4$ is 'n een-tot-een-funksie. Vir elke x-waarde is daar net een en slegs een y-waarde.
  Die inverse van is $y = 3x + 4$ 'n funksie.
- 'n Baie-tot-een-funksie het 'n inverse wat nie 'n funksie is nie. Ons kan egter die definisieversameling van die funksie beperk om sy inverse 'n funksie te maak.

  Byvoorbeeld: $y = 2x^2$ is 'n baie-tot-een-funksie. Vir twee of meer x-waardes is daar een y-waarde. (as $x = 2$, dan $y = 8$.
  As $x = -2$, dan $y = 8$). Daarom is sy inverse $= \pm\sqrt{\frac{x}{2}}$, nie 'n funksie nie.
- Om te kyk vir 'n funksie, trek 'n vertikale lyn. As enige vertikale lyn die grafiek slegs op een plek sny, is die grafiek 'n funksie. As enige vertikale lyn die grafiek op meer as een plek sny, dan is die grafiek nie 'n funksie nie.
- Om te kyk vir 'n een-tot-een-funksie, trek 'n horisontale lyn. As enige horisontale lyn die grafiek slegs op een plek sny, is die grafiek 'n een-tot-een-funksie. As enige horisontale lyn die grafiek op meer as een plek sny, is die grafiek 'n baie-tot-een-funksie. **[5]**

Aktiwiteit 10

1. a) As $f(x) = -3x^2$, skryf die vergelyking van die inverse funksie in die vorm $y =$ ………………. (2)

b) Bepaal die definisieversameling en waardeversameling van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ (4)

c) Bepaal die snypunte van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ (4)

2. a) As $g(x) = 3x + 2$, bepaal $g^{-1}(x)$ (2)

b) Skets g, g^{-1} en die lyn $y = x$ op dieselfde assestelsel. (3)

[15]

Oplossings

1. a) Vir $f(x) = -3x^2$.

$f^{-1}(x)$: $x = -3y^2$ ✓

$-\frac{x}{3} = y^2$

$y = \pm\sqrt{-\frac{x}{3}}$ ✓ (2)

b)

	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
Definisieversameling	$x \in \mathbb{R}$ ✓	$x \geq 0$ ✓
Waardeversameling	$y \geq 0$ ✓	$y \in \mathbb{R}$ ✓

(4)

c) Om die snypunte te bepaal, stel ons die twee vergelykings gelyk aan mekaar.

Die lyn $y = x$, die simmetrie-as van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$, kan ook gebruik word om die snypunte van f(x) en $f^{-1}(x)$ te bepaal.

$y = x$ en $f(x) = -3x^2$

$\therefore x = -3x^2$

$\therefore 3x^2 + x = 0$ ✓

$\therefore x(3x + 1) = 0$ ✓

$\therefore x = 0$ of $x = -\frac{1}{3}$ ✓

Vervang $x = 0$ *in* $y = x \therefore y = 0 \therefore (0; 0)$ ✓

Vervang $x = -\frac{1}{3}$ *in* $y = x \therefore y = -\frac{1}{3} \therefore \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ (4)

2. a) $g(x) = 3x + 2$ ✓

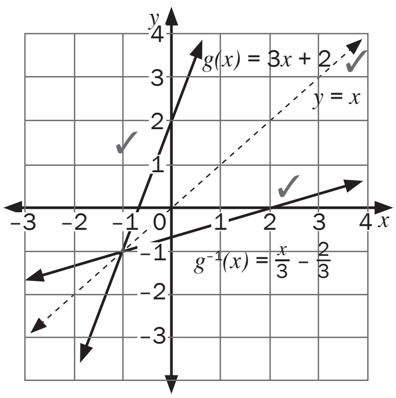
Vir $g^{-1}(x)$, $x = 3y + 2$

$x - 2 = 3y$

$y = \frac{x-2}{3}$

$y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ ✓

b)



(4)

[15]

Gegee: $g(x) = -x^2$ waar $x \leq 0$ en $y \leq 0$

(a) Skryf die inverse van g, g^{-1} in die vorm $h(x) =$ .... (3)

(b) Skets die grafieke van g, h en $y = x$ op dieselfde assestelsel. (4)

Oplossings

(a) $y = -x^2$

$x = -y^2$

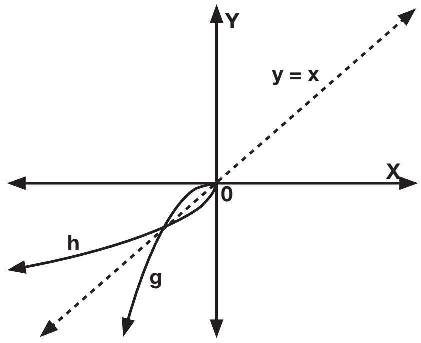
$-x = y^2$ ✓

$\pm\sqrt{-x} = y$ ✓

$-\sqrt{-x} = y$ waar $x \leq 0$ en $y \leq 0$

$\therefore h(x) = -\sqrt{-x}$ ✓ (3)

(b)



Vir g korrekte vorm ✓ en die afsnit ✓

Vir h korrekte vorm ✓ en die afsnit ✓ (4)

[7]

4.5 Die logaritmiese funksie

- $y = \log_x a$ is 'n logaritmiese funksie met a = log getal, x = log grondtal.
- Ons lees $y = \log_x a$ as "y is gelyk aan log a grondtal x".
- Die logaritmiese funksie word slegs gedefinieer indien $a > 0$, $a \neq 1$ en $x > 0$.
- 'n Eksponensiaalvergelyking kan as 'n logaritmiese vergelyking geskryf word en omgekeerd.

bv. 9

Skryf elkeen van die volgende eksponensiaalvergelykings as logaritmiese vergelykings:

- $2^6 = 64$
- $5^3 = 125$

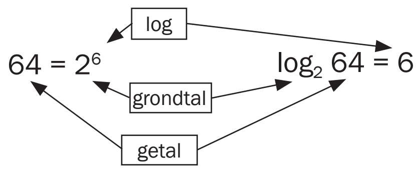
Oplossings

1. $2^6 = 64$

$\therefore 6 = \log_2 64$

2. $5^3 = 125$

$\therefore 3 = \log_5 125$



NB

Die inverse van die eksponensiaalfunksie $y = a^x$ is $x = a^y$.

Om y die onderwerp van die formule, $x = a^y$, te maak, gebruik ons die *logfunksie*

$y = \log_a x$ is die inverse van $y = a^x$.

bv. 10

Gegee: $f(x) = 2^x$

a) Bepaal f^{-1} in die vorm $y = \ldots\ldots$

b) Skets die grafieke van $f(x)$, $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

c) Skryf die definisieversameling en waardeversameling van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ neer.

Oplossings

a) Die inverse van die eksponensiaalfunksie $y = 2^x$ is $x = 2^y$ wat as $y = \log_2 x$ geskryf kan word. ✓

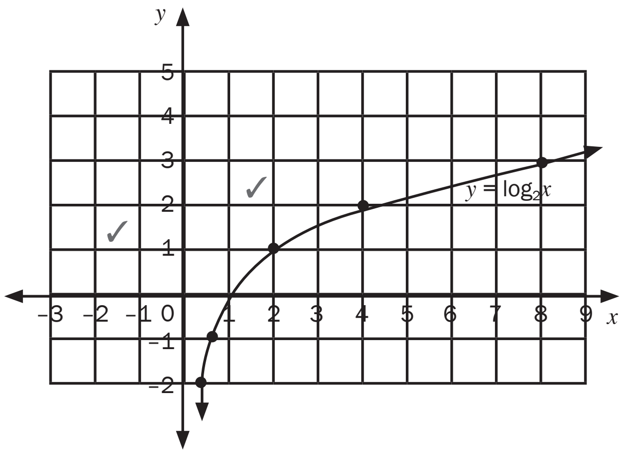
b) Om die grafiek te plot, gebruik 'n tabel met waardes:

Trek eers 'n tabel vir $y =$

x	–2	–1	0	1	2	3
$y = 2^x$	¼	½	1	2	4	8

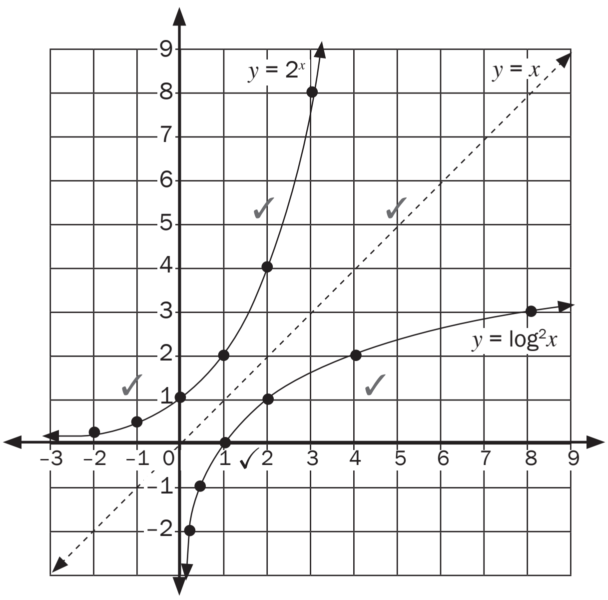
Maak dan 'n tabel vir $y = \log_2 x$

x	¼	½	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	–2	–1	0	1	2	3



[3]

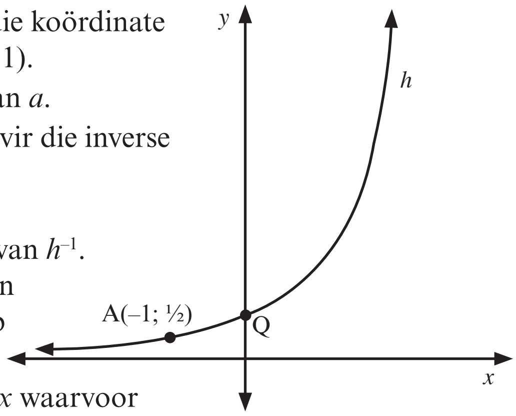
Kom ons vergelyk die twee grafieke op die Cartesiese vlak.



Die grafiek van $y = \log_2 x$ is 'n **weerspieëling** in die lyn $y = x$ van die eksponensiaalgrafiek van $y = 2^x$.

Aktiwiteit 11

Die grafiek van $h(x) = a^x$ is hieronder geskets.
A $(-1; \frac{1}{2})$ is 'n punt op die grafiek van h.



1. Verduidelik waarom die koördinate van Q gelyk is aan (0; 1). (2)
2. Bereken die waarde van a. (2)
3. Skryf die vergelyking vir die inverse funksie, h^{-1} in die vorm $y =$ .... neer. (1)
4. Teken 'n sketsgrafiek van h^{-1}. Dui die koördinate aan van twee punte wat op hierdie grafiek lê. (2)
5. Lees die waardes van x waarvoor $\log_2 x > -1$ van jou grafiek af. (1)

[8]

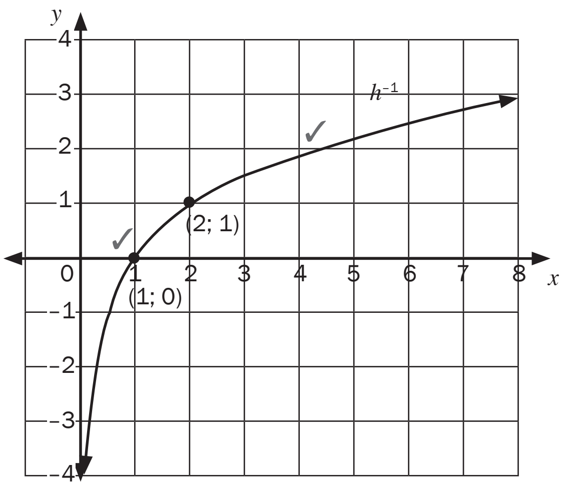
Oplossings

1. $h(0) = a^0 = 1$. ✓ Enige grondtal verhef tot die mag 0 is 1. ✓ (2)

2. $h(x) = a^x$ en A$(-1; \frac{1}{2})$ dus $a^{-1} = \frac{1}{2}$✓

   $a^{-1} = 2^{-1}$ so $a = 2$✓ en $y = 2^x$ (2)

3. Ruil x en y om, dus $x = 2^y$ en $y = \log_2 x$ ✓ (1)

4. 

   (2)

5. $x > 0,5$ ✓ (1)

[8]

Wat jy moet kan doen:

- Verstaan die konsep van die inverse van 'n funksie en bepaal die vergelykings van die inverses.
- Die lyn $y = x$ is die simmetrielyn van die funksie en die inverse van die funksie.
- Die logaritmiese funksie en die eksponensiaalfunksie is inverse funksies van mekaar.
- As die inverse nie 'n funksie is nie, kan die definisieversameling van 'n funksie beperk word om die inverse 'n funksie te maak.
- Identifiseer simmetrie-asse vir parabole en hiperbole.
- Skets die grafieke van verskillende funksies deur hulle eienskappe te gebruik, bv. asimptote, x- en y-afsnitte en draaipunte
- Bepaal die funksie se vergelyking uit 'n grafiek
- Los probleme op wat twee of meer grafieke behels.

5 Eenheid

Trig funksies

5.1 Grafieke van trigonometriese funksies

Grafiek 1. Die sinusfunksie: $y = a \sin_b (x + p) + q$

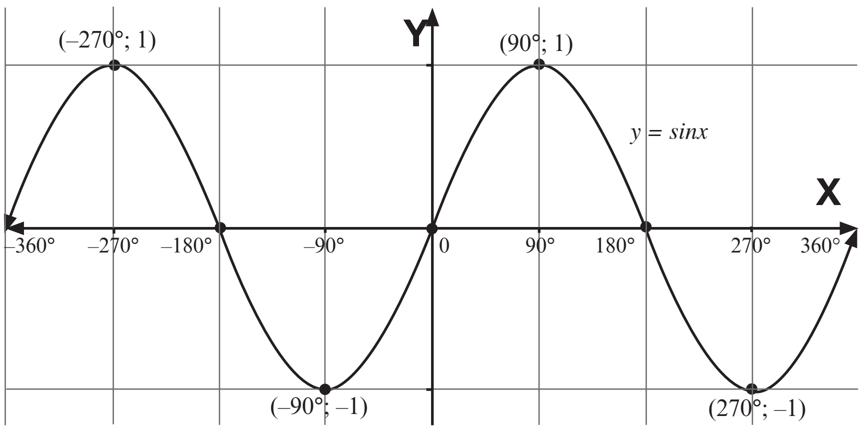
bv. 1

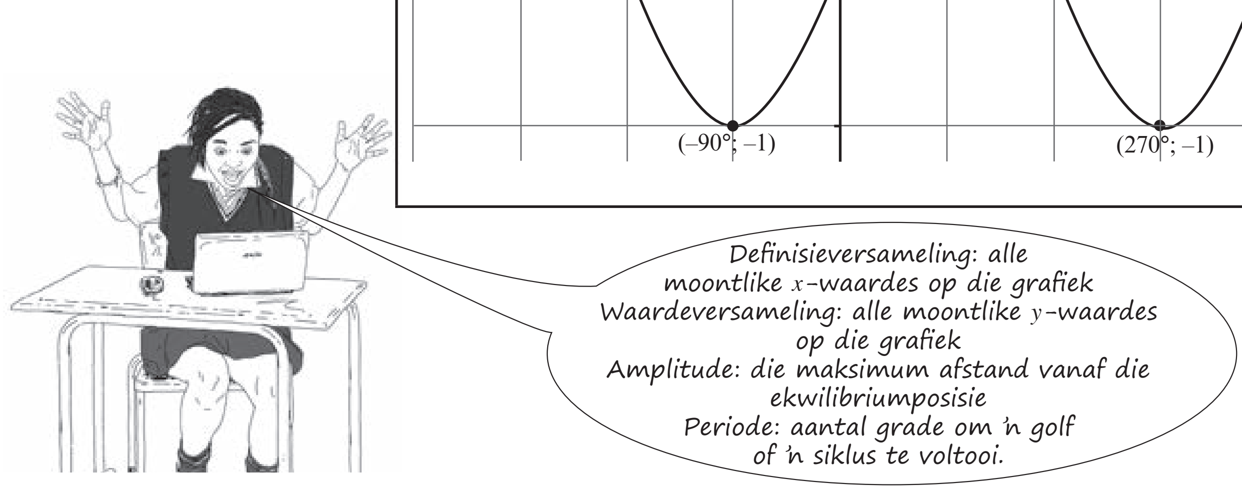
Skets die grafiek van $y = \sin x$ vir x

- Ons kan gebruik maak van 'n tabel of 'n sakrekenaar om die kritieke punte van die grafiek te bepaal.
- Die eindpunte van die definisieversameling moet ingesluit word, d.i. $x = -360°$ en $x = 360°$
- Alle afsnitte met die x-as en die y-as moet aangedui word sowel as alle minimum- en maksimumpunte (draaipunte)

Oplossing

x	–360°	–270°	–180°	–90°	0°	90°	180°	270°	360°
y	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0





Aktiwiteit 1

Gebruik die grafiek $y = \sin x$ op die vorige bladsy om hierdie vrae te beantwoord:

1. Wat is die maksimum- en minimumwaardes van $y = \sin x$? (2)
2. Skryf die definisieversameling en die waardeversameling van f $y = \sin x$ neer. (4)
3. Skryf die x-afsnitte van $y = \sin x$ neer. (2)
4. Wat is die amplitude van die grafiek van $y = \sin x$? (1)
5. Wat is die periode van die grafiek van $y = \sin x$? (1)

[10]

Oplossings

		$y = \sin x$	
1	Maksimumwaardes	1 ✓ , by $x = -270°$ en $90°$	
	Minimumwaardes	-1 ✓, by $x = -90°$ en $270°$	(2)
2	Definisieversameling	$x \in [-360°;360°]$, $x \in \mathbb{R}$✓✓	
	Waardeversameling	$[-1; 1]$ $y \in \mathbb{R}$✓✓	(4)
3	x-afsnitte	$-360°$, $-180°$, $0°$, $180°$ en $360°$.✓✓	(2)
4	Amplitude	1✓	(1)
5	Periode	360°✓	(1)

[10]

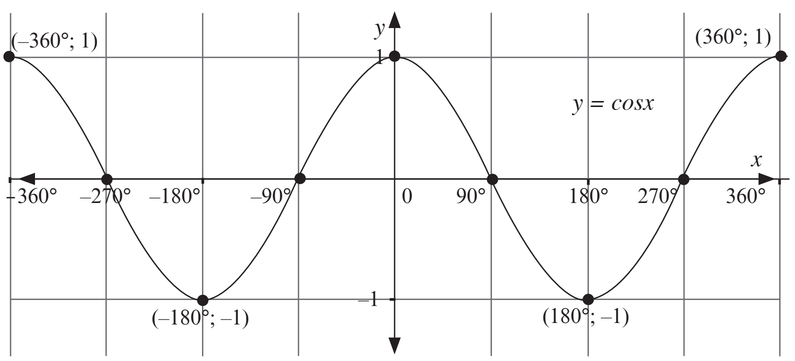
Grafiek 2. Die cosinusfunksie: $y = a \cos b(x + p) + q$

bv. 2

Skets die grafiek van $y = \cos x$ vir $x \in [-360°;360°]$

- Ons kan gebruik maak van 'n tabel of 'n sakrekenaar om die kritieke punte van die grafiek te bepaal.
- Die eindpunte van die definisieversameling moet ingesluit word, d.i. $x = -360°$ en $x = 360°$
- Alle afsnitte met die x-as en die y-as moet aangedui word sowel as alle minimum- en maksimumpunte (draaipunte)

x	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
y	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



	$y = \cos x$	
1	Maksimumwaardes	1, by $x = 0°$ en 360°
2	Minimumwaardes	–1, by $x = –180°$ en 180°
3	x-afsnitte	–270°, –90°, 90° en 270°.
4	Amplitude	1
5	Periode	360°
6	Definisieversameling	$x \in [-360°;360°]$, $x \in \mathbb{R}$
7	Waardeversameling	$[–1; 1]$ $y \in \mathbb{R}$

Grafiek 3. Die tangensfunksie:

$$y = a \tan b(x + p) + q$$

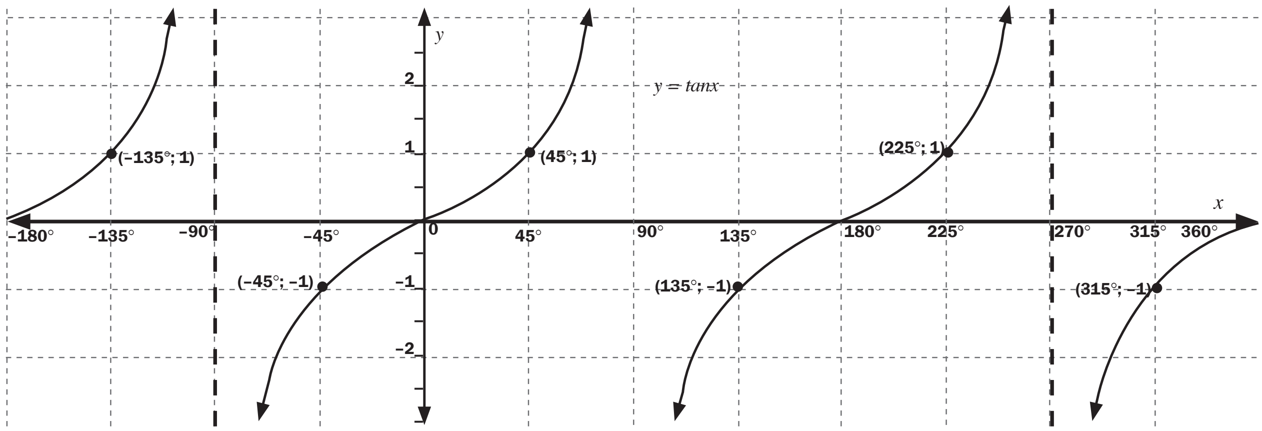
bv. 3

Skets die grafiek van $y = \tan x$ vir $x \in [-180°;180°]$

- Alle afsnitte met die x-as en die y-as moet aangedui word.
- Die eindpunte van die definisieversameling moet ingesluit word, d.i. $x = -180°$ en $x = 360°$
- Die vergelykings van die asimptote moet op die grafiek geskryf word.

Oplossing

x	–180°	–135°	–90°	–45°	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
y	0	1	ongedefinieerd	–1	0	1	ongedefinieerd	–1	0	1	ongedefinieerd	–1	0



	$y = \tan x$	
1	Asimptote	$x = –90°$, $x = 90°$ en $x = 270°$
2	x-afsnitte	–180°, 0°, 180° en 360°.
3	Periode	180°
4	Definisieversameling	$x \in [-180°;360°]$, $x \in \mathbb{R}$
5	Waardeversameling	$(–\infty; \infty)$. $y \in \mathbb{R}$

5.2 Die effek van *a* op die vorm van die grafiek: verandering in amplitude

Beskou die grafieke van $y = a \sin x$, $y = a \cos x$ en $y = a \tan x$

bv. 4

1. Skets die volgende grafieke:

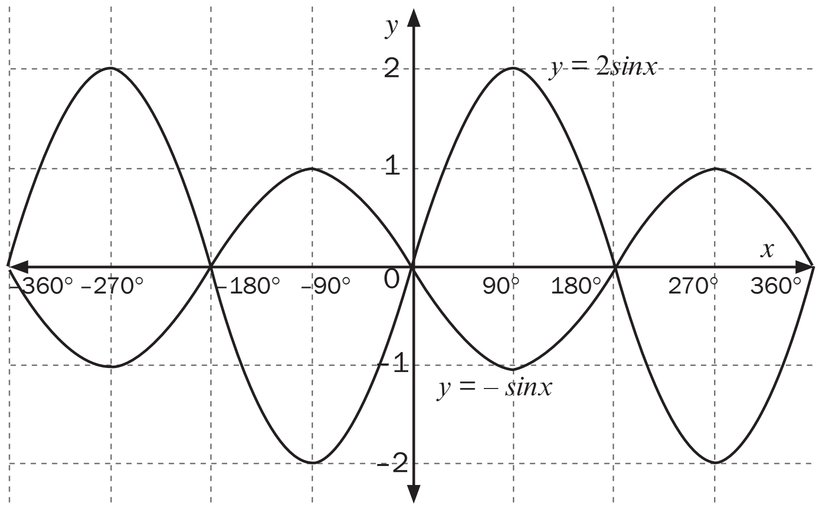
a) op dieselfde assestelsel
$y = –\sin x$ en $y = 2\sin x$ vir $x \in [–360°; 360°]$,

b) op dieselfde assestelsel
$y = –2 \cos x$ en $y = ½ \cos x$ vir $x \in [–360°; 360°]$,

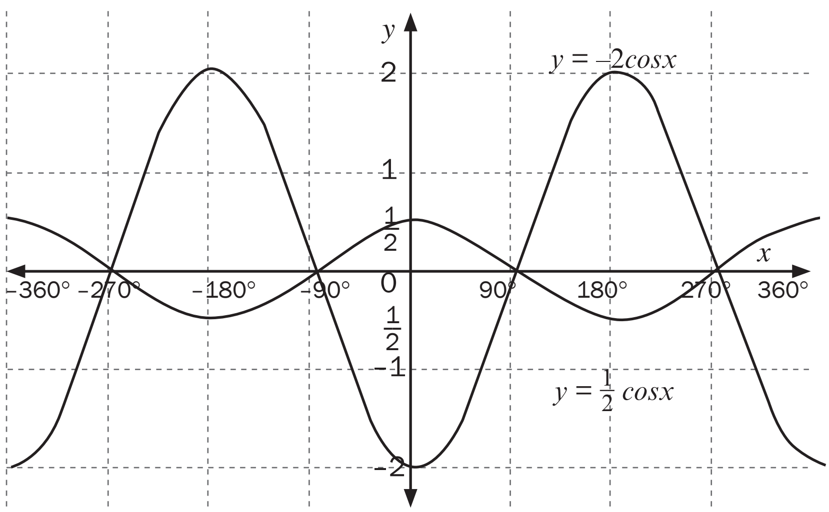
c) $y = 2 \tan x$ vir $x \in [–180°; 180°]$,

Oplossings

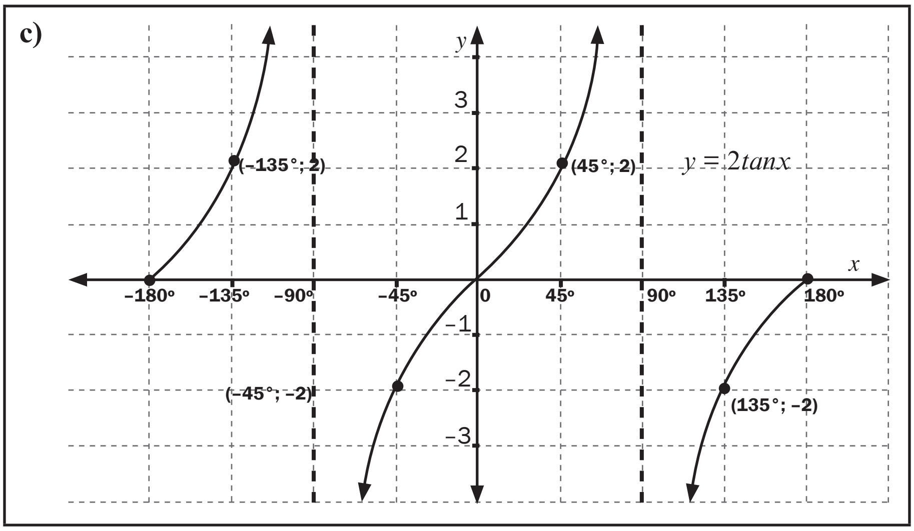
a)



b)



c)



Gevolgtrekking

Die parameter a verander die **amplitude** van die grafiek in $y = a \sin bx$ en $y = a \cos bx$.

5.3 Die effek van q op die vorm van die grafiek: vertikale skuif

Beskou die grafieke van $y = \sin x + q$, $y = \cos x + q$ en $y = \tan x + q$.

bv. 5

1. Skets die volgende grafieke op dieselfde assestelsel vir die definisieversameling [–360°; 360°]:

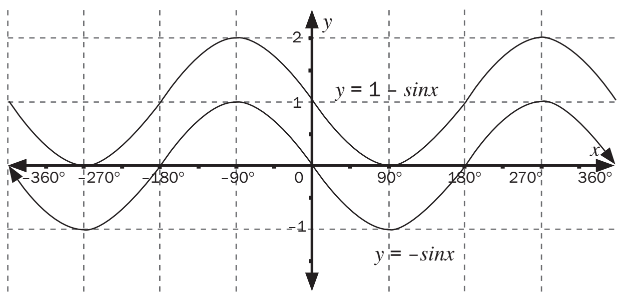
a) $y = -\sin x$ en $y = -\sin x + 1$

b) $y = \cos x$, $y = \cos x + 1$, $y = \cos x - 2$

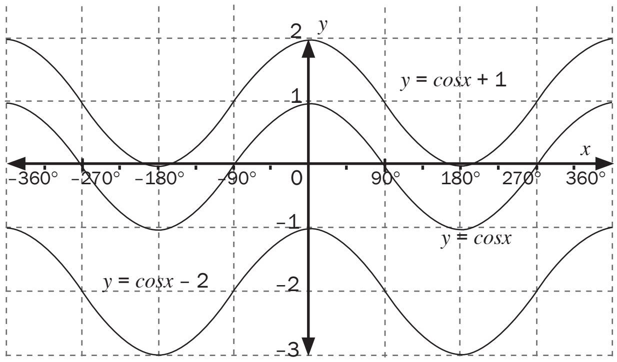
c) $y = \tan x$ en $y = \tan x + 1$

Oplossings

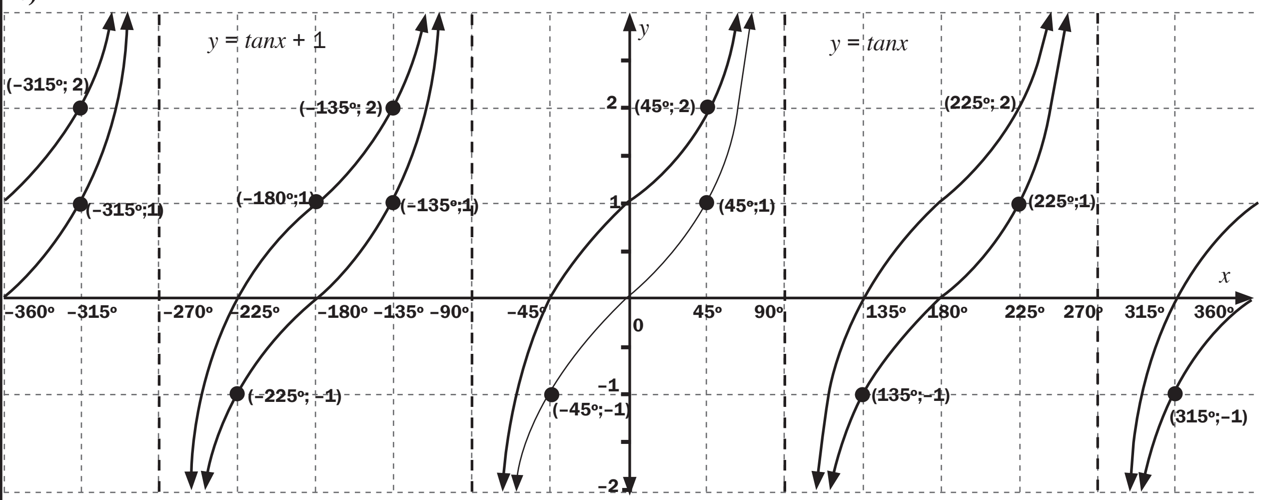
a)



b)



c)



Gevolgtrekking

Die parameter q skuif die hele grafiek met q eenhede op of af.

5.4 Die effek van *b* op die vorm van die grafiek: verandering in periode

Beskou die grafieke van $y = \sin bx$, $y = \cos bx$ en $y = \tan bx$.

bv. 6

1. Teken die grafieke op aparte assestelsels:

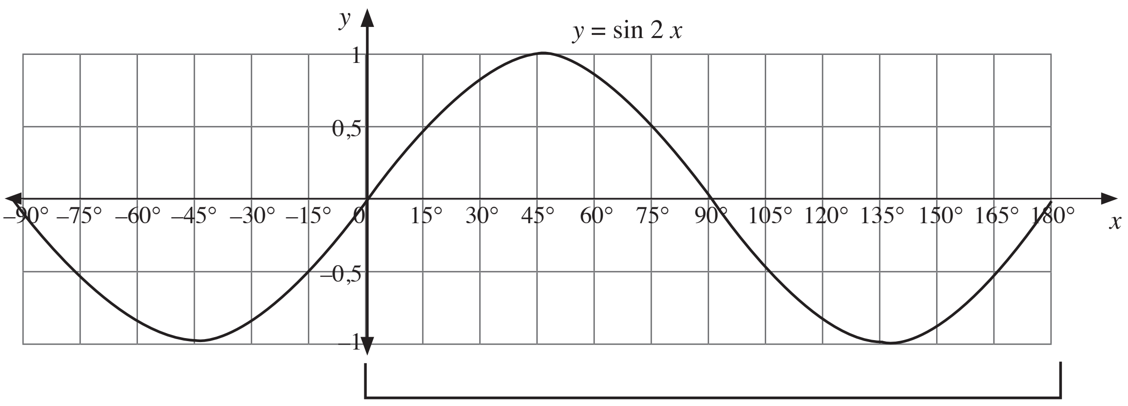
a) $y = \sin 2x$ vir $x \in [-90°, 180°]$

b) $y = \cos 3x$ vir $x \in [0°; 360°]$

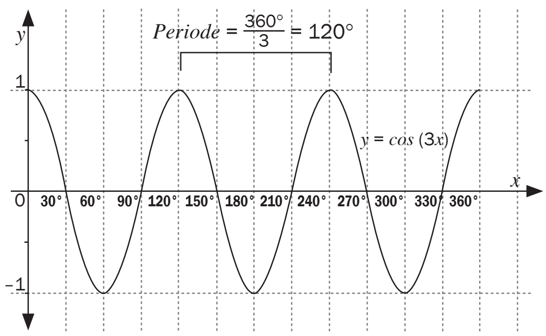
c) $y = \tan \frac{1}{2}x$ vir $x \in [-360°; 360°]$

Oplossings

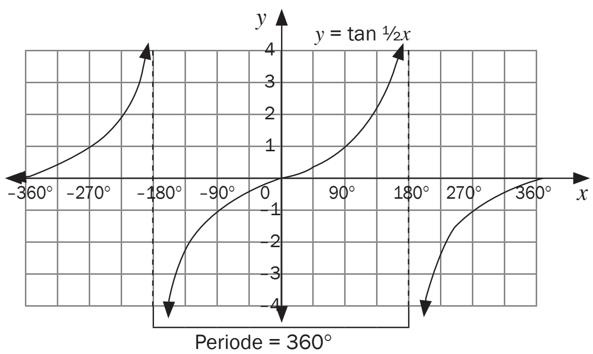
1. a) Vir $y = \sin 2x$, is die periode $360° \div 2 = 180°$.



b) Vir $y = \cos 3x$, is die periode $360° \div 3 = 120°$.



c) Vir y = tan $\frac{1}{2}x$, is die periode $= 180° \times 2 = 360°$



Gevolgtrekking

- Die **periode** van die grafiek is die aantal grade wat dit neem om een golflengte te voltooi.
- Die waarde van *b* beïnvloed die periode van die grafiek.
- Vir $y = \sin bx$ en $y = \cos bx$, is die periode $= \frac{360^0}{b}$
- Vir $y = \tan bx$, is die periode $= \frac{180^0}{b}$

5.5 Die effek van p op die vorm van die grafiek: horisontale skuif

Beskou die grafieke van die vorm $y = \sin(x + p)$, $y = \cos(x + p)$ en $y = \tan(x + p)$.

bv. 7

1. Teken die volgende grafieke op dieselfde assestelsel en vir $x \in [-180°, 180°]$:

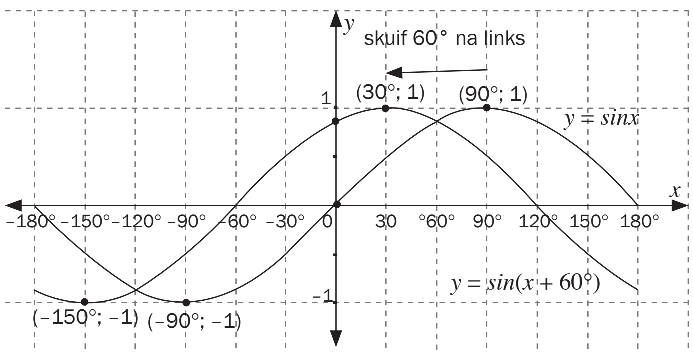
a) $y = \sin x$ en $y = \sin(x + 60°)$

b) $y = \cos x$ en $y = \cos(x - 45°)$

c) $y = \tan x$ en $y = \tan(x + 45°)$

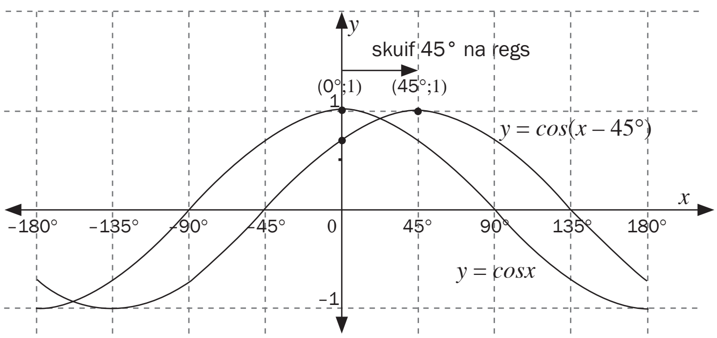
Oplossings

1. a) $y = \sin x$; $y = \sin(x + 60°)$



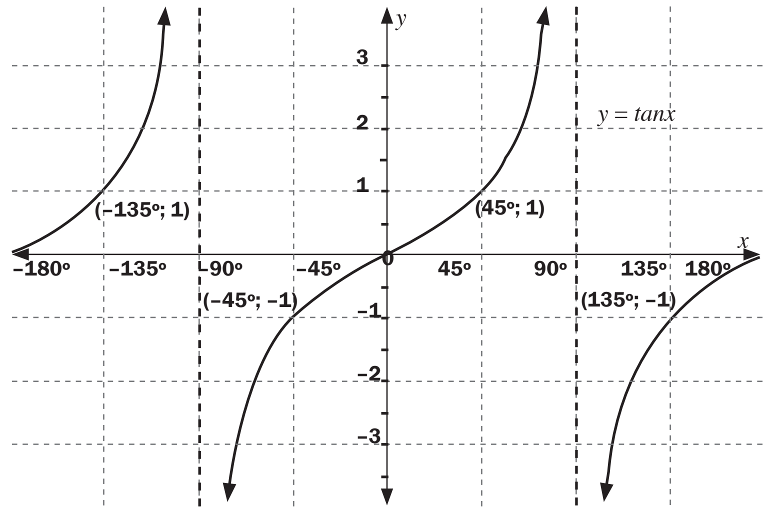
Die grafiek van $y = \sin x$ het 60° na links vanaf $y = \sin(x + 60°)$ geskuif.

b) $y = \cos x$, $y = \cos(x - 45)$

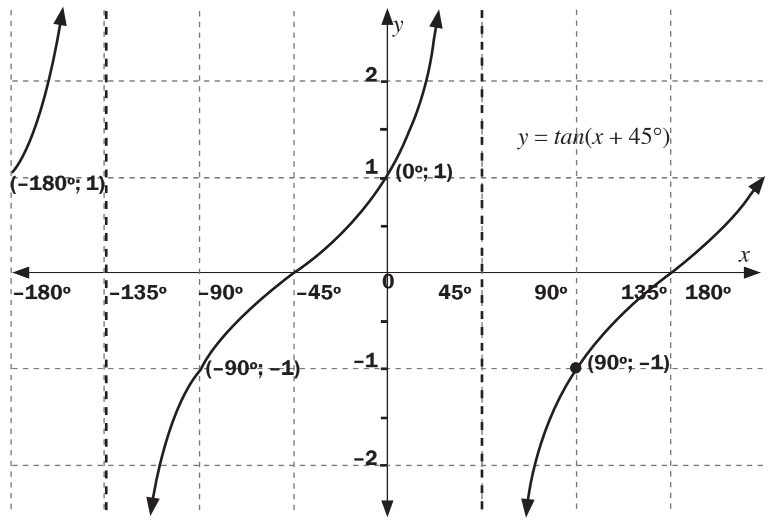


Die grafiek van $y = \cos x$ het 45° na regs vanaf $y = \cos(x - 45)$ geskuif.

c) $y = \tan x$ en $y = \tan(x + 45°)$



Die grafiek van $y = \tan x$ het 45° na links vanaf $y = \tan(x + 45°)$ geskuif. Die asimptote het ook 45° na links geskuif.



Gevolgtrekking

Vir grafieke van die vorm $y = \sin(x + p)$, $y = \cos(x + p)$ en
$y = \tan(x + p)$,
beïnvloed p die horisontale skuif van die grafiek.

- As $p > 0$ (positief) is, dan skuif die grafiek p grade na links.
- As $p < 0$ (negatief) is, dan skuif die grafiek p grade na regs.
- In alle grafieke moet die x-afsnitte, y-afsnitte, maksimum- en minimumpunte op die grafiek aangedui word. As die waarde van b verander, sal die x-afsnitte, y-afsnitte, maksimum- en minimumpunte ook verander. Om te verseker dat hierdie punte altyd aangedui word, gebruik die volgende x-waardes om die grafiek te stip:

Vergelyking	b=1	b=2	b=3	b=½
y = sinbx of y = cosbx	Vanaf 0°, gebruik intervalle van 90° Interval = $\frac{90^0}{b}$ Periode = $\frac{360^0}{b}$	Vanaf 0°, gebruik intervalle van 45° Interval = $\frac{90^0}{b}$ Periode = $\frac{360^0}{b}$	Vanaf 0°, gebruik intervalle van 30° Interval = $\frac{90^0}{b}$ Periode = $\frac{360^0}{b}$	Vanaf 0°, gebruik intervalle van 180° Interval = $\frac{90^0}{b}$ Periode = $\frac{360^0}{b}$
y = tanbx	Vanaf 0°, gebruik intervalle van 45° Interval = $\frac{45^0}{b}$ Periode = $\frac{180^0}{b}$	Vanaf 0°, gebruik intervalle van 22,5° Interval = $\frac{45^0}{b}$ Periode = $\frac{180^0}{b}$	Vanaf 0°, gebruik intervalle van 15° Interval = $\frac{45^0}{b}$ Periode = $\frac{180^0}{b}$	Vanaf *0°*, gebruik intervalle van *90°* Interval = $\frac{45^0}{b}$ Periode = $\frac{180^0}{b}$
$y = \sin(x+p)$ of $y = \cos(x+p)$	Vanaf 0°, gebruik intervalle van (90°– p°) met p > 0 Die intervalle vir $y = \sin(x - 30)$ en $y = \sin(x + 30)$ sal dieselfde wees. Die intervalle sal wees 90 – 30 = 60.			
$y = \tan(x+p)$	Vanaf 0°, gebruik intervalle van (45°– p°) met p>0 Die intervalle sal $y = \tan(x - 30)$ en $y = \tan(x + 30)$ wees. Die intervalle sal wees 45 – 30 = 15.			

Aktiwiteit 2

1. Gegee $f(x) = 2\cos x$ en $g(x) = \sin(x + 30°)$

a) Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsels vir $x \in [-150°; 180°]$
Toon alle afsnitte met die asse en koördinate van die draaipunte duidelik aan. (7)

Gebruik jou grafiek om die volgende vrae te beantwoord:

b) Skryf die periode van f neer. (1)

c) Vir watter waardes van x is $f(x) = g(x)$? (2)

d) Vir watter waardes van x is $f(x) > 0$? (2)

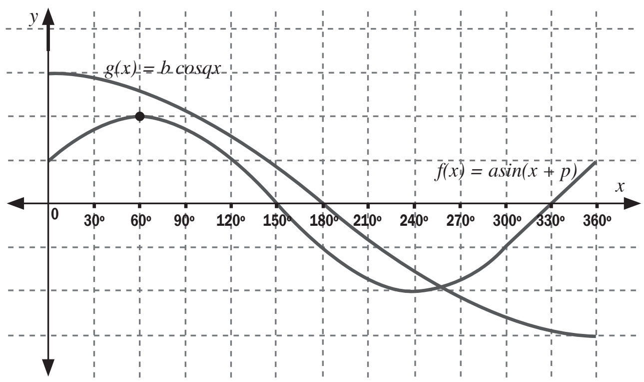
e) Vir watter waardes van x neem $g(x)$ toe? (2)

f) Bepaal een waarde vir x waarvoor $f(x) - g(x) = 1{,}5$. (1)

g) As die kromme van f een eenheid afgeskuif word, skryf die nuwe vergelyking van f neer. (2)

h) As die kromme van g 45° na links geskuif word, skryf die nuwe vergelyking van g neer. (2)

2. Die skets hieronder is van die grafieke van $g(x) = a\sin(x + p)$ en $f(x) = b\cos qx$ vir $x \in [0°; 180°]$



a) Bepaal die numeriese waardes van a, p, b en q. (5)

b) As die grafiek van $g(x)$ twee eenhede afgeskuif word:

1) Skryf die amplitude van die nuwe grafiek neer. (1)

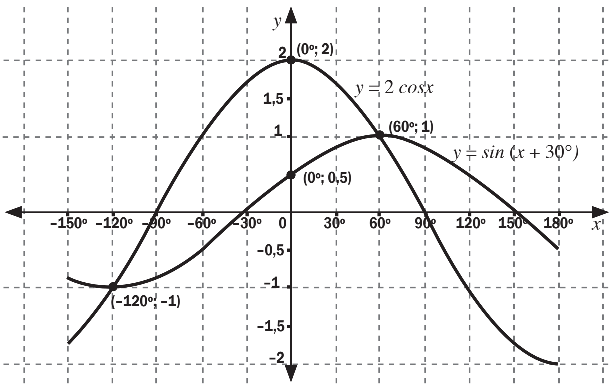
2) Skryf die vergelyking van die nuwe grafiek neer. (2)

c) As die grafiek van $f(x)$ 60° na links geskuif word, skryf twee moontlike vergelykings van die nuwe grafiek neer. (2)

[29]

Oplossings

1. a) ✓✓✓ vir $g(x) = 2\cos x$ en ✓✓✓✓ vir $f(x) = \sin(x + 30°)$



(7)

b) periode = 360°✓ (1)

c) $x = –120°$ of $60°$ ✓✓ (2)

d) vir $f(x) > 0$; $x \in (–90°; 90°)$ ✓✓ (2)

e) $g(x)$ neem toe wanneer $x \in (–120°; 60°)$ ✓✓ (2)

f) $x = 0°$ ✓ (1)

g) Nuwe $f(x) = 2\cos x – 1$✓✓ (2)

h) Oorspronklike vergelyking: $g(x) = \sin(x + 30°)$, met 45° skuif na links:
$g(x) = \sin(x + 30° + 45°)$ dus $g(x) = \sin(x + 75°)$ ✓✓ (2)

2. a) $a = 2$ (amplitude van $f(x)$) ✓
$f(x) = 2\sin(x+p)$… Vervang 60°
$\therefore 2 = 2\sin(60° + p)$✓
$\div 2 \therefore 1 = \sin(60° + p)$
druk *shift* $\sin^{-1}(1) = 90°$
$\therefore 60° + p = 90° \therefore p = 30°$✓$\therefore f(x) = 2\sin(x + 30°)$ ✓
$b=3$ (amplitude van $g(x)$)
Periode = 720
$720° = \frac{360°}{q} \therefore q = \frac{1}{2} \therefore g(x) = 3\cos\frac{1}{2}x$ ✓ (5)

b) (1) Amplitude = 3 ('n skuif op of af het geen effek op die amplitude nie) ✓ (1)
(2) $g(x) = 3\cos\frac{1}{2}x - 2$✓✓ (2)

c) $f(x) = 2\sin(x + 90°) = 2\cos x$ ✓✓ (2)

[29]

Wat jy moet kan doen

- Herken die basiese vorms van die grafieke wat met hulle vergelykings geassosieer word.
- Skets funksies en wys die effek van verskillende parameters a, p en q.
- Teken elke grafiek deur die kritieke punte te gebruik: afsnitte met die asse en draaipunte, waar toepaslik.
- Toon enige asimptote aan en sluit enige ander punte in wat jy mag nodig kry.
- Bepaal die kenmerke van grafieke insluitende
    - definisieversameling en waardeversameling van funksies
    - draaipunte
    - asimptote
    - afsnitte met asse
- Bepaal die vergelyking van die grafiek.
- Skets trig funksies, enige skuiwe en veranderinge in amplitude en periode.

Eenheid 6

Finansies, groei en verval

6.1 Hersiening: Enkelvoudige en saamgestelde rente

wenk

In alle berekeninge, rond slegs jou finale antwoord af.

Finansiële terme

- **Rente** is 'n fooi wat betaal word vir die gebruik van geleende geld, of geld wat verdien word op spaargeld. Dit word bereken as 'n persentasie van die geld wat geleen of verdien word.
- **Enkelvoudige rente** is die rente op 'n aanvanklike som geld (kapitaalbedrag). Elke jaar word jy dieselfde bedrag rente gevra of ontvang jy dieselfde bedrag rente.

bv. 1

Enkelvoudige rente van 6% p.j. (per jaar) op R100 beteken dat as jy R100 vir 'n jaar lank leen, skuld jy daardie R100 en nog 'n verdere R6. Dus skuld jy R106.

As jy R100 vir 2 jaar leen, skuld jy R100 + R6 + R6 = R112.

Mikro-lener- en **Huurkoop**ooreenkomste werk dikwels op enkelvoudige rente teen 'n maandelikse of jaarlikse rentekoers.

Persentasietoename of -afname in bevolkings, aantal leerders, ens. kan ook met die formule vir enkelvoudige rentekoers bereken word.

- **Saamgestelde rente** is ook rente op 'n kapitaalbedrag P. Vir elke jaar, word die vorige jaar se eindbedrag die nuwe kapitaalbedrag. Dus word die rente op die kapitaal en die rente van die vorige jaar bereken.
  Saamgestelde rente van 6% p.j. (per jaar) op R100 beteken dat as jy R100 vir 2 jaar leen, skuld jy R100 + R6 = R106 in die eerste jaar.
  In die tweede jaar, skuld jy R106 + 6% van R106.
  R106 + (6% × R106) = R106 + R6,36 = R112,36

  Hier is die formules vir enkelvoudige en saamgestelde rente.

Enkelvoudige rente: $A = P(1 + ni)$

waar P die kapitaalbedrag (oorspronklike som geld wat belê of geleen is)
i die rentekoers
n die aantal jare
A die eindbedrag is

Saamgestelde rente: $A = P(1 + i)^n$

waar P die kapitaalbedrag (oorspronklike som geld wat belê of geleen is)
i die rentekoers
n die aantal jare
A die eindbedrag is

bv. 2

As jy R300 teen 9% p.j. **enkelvoudige rente** leen, hoeveel sal jy ná 7 jaar skuld?

Oplossing

A = ? P = R300 $i = 9\% = \frac{9}{100} = 0{,}09$ $n = 7$ jaar

$A = P(1 + ni)$

$A = 300(1 + 7 \times 0{,}09) = 489$

Na 7 jaar skuld jy R489

- Skryf neer wat gegee is.
- Besluit wat jy moet bepaal.
- Los daardie veranderlike op.

As jy R300 teen 9% p.j. **saamgestelde rente** leen, hoeveel sal jy ná 7 jaar skuld?

A = ? P = 300 $i = 9\% = \frac{9}{100} = 0{,}09$ $n = 7$ jaar

$A = P(1 + i)^n$

$A = 300(1 + 0{,}09)^7$

$A = 300(1{,}09)^7$

$A = 548{,}411736\ldots$

$A \approx$ R548,41 tot die naaste sent.

Watter een is die beter opsie?

R548,41 – R489 = R59,41

Dus is saamgestelde rente R59,41 meer as enkelvoudige rente ná 7 jaar.

bv. 3

1. Jy belê R1 570 teen 11% p.j. maandeliks saamgestel.

a) Hoeveel sal jy ná 7 jaar ontvang?

b) Hoeveel rente het jy ná 7 jaar verdien?

Oplossings

1. a) $A = P(1 + i)^n$

A = ? P = R1 570 $n = 7$ jaar $\times$ 12 maande = 84 tydperke

$i = 11\% \div 12$ maande $= \frac{0{,}11}{12}$

$A = 1570\left(\frac{1 + 0{,}11}{12}\right)^{7\times12}$

$A = 3\ 378{,}959672\ldots$

Jy sal R3 378,96 (tot die naaste sent) ná 7 jaar ontvang.

b) Jy sal R3 378,96 – R1 570 = R1 808,96 rente ontvang.

Maandeliks saamgestel beteken die rente word aan die einde van elke maand bereken. Herlei dus die jare na maande.

11% per jaar maandeliks saamgestel, dus deel ons die rentekoers deur 12 maande.

NB

Rente per jaar as volg saamgestel:

maandeliks → $\frac{i}{12}$ n jaar × 12 maande

kwartaalliks → $\frac{i}{4}$ n jaar × 4 kwartale in die jaar

halfjaarliks, (elke ses maande) → $\frac{i}{2}$ n jaar × 2

Aktiwiteit 1

6.1.1 Jy belê R1 700 teen 'n rentekoers van 10% kwartaalliks saamgestel. Bereken hoeveel jou belegging ná 6 jaar werd is. (3)

6.1.2 R25 000 word in 'n spaarrekening belê. Bereken die waarde van die belegging ná 5 jaar as rentekoerse die volgende is:

a) 11% maandeliks saamgestel

b) 11% halfjaarliks saamgestel (5)

[8]

Oplossings

6.1.1 A = ? P = R1 700 $n = 6$ jaar × 4 = 24

i = 10% kwartaalliks saamgestel

deel dus deur 4 $i = \frac{0{,}10}{4}$ ✓

$A = P(1 + i)^n$

$A = 1\,700\left(1 + \frac{0{,}10}{4}\right)^{24}$ ✓

= R3 074,83 (tot die naaste sent) ✓ (3)

6.1.2 a) A = R25 000 $i = \frac{0{,}11}{12}$ ✓ $n = 5 \times 12$

$A = 25\,000\left(1 + \frac{0{,}11}{12}\right)^{5 \times 12}$ ✓

= R43 222,89 ✓

b) A = R25 000 $i = \frac{0{,}11}{2}$ $n = 5 \times 2$

$A = 25\,000\left(1 + \frac{0{,}11}{2}\right)^{5 \times 2}$ ✓

= R42 703,61 ✓ (5)

[8]

6.2 Bereken die waarde van P, i en n

Ons kan ook die formules vir saamgestelde en enkelvoudige rente gebruik om die kapitaal P, die rentekoers i en die tydperk n te bereken.

bv. 4

1. Hoeveel moet John nou belê sodat hy ná 5 jaar teen 8% enkelvoudige rente R4 200 sal hê?

Oplossing

1. A = R4 200 $n = 5$ $i = 8\%$ P = ?

$A = P(1 + n.i)$

$4\,200 = P(1 + 5(0{,}08))$

$4\,200 = P(1{,}4)$

$P = \frac{4\,200}{1{,}4} = 3\,000$

$\therefore$ Johan moet R3 000 belê.

bv. 5 (bepaal i)

'n Bevolking neem toe van 12 000 tot 214 000 in 10 jaar. Teen watter jaarlikse (saamgestelde) koers groei die bevolking? (Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek)

Oplossing

A = 214 000 P = 12 000 $n = 10$ $i = ?$

$A = P(1 + i)^n$

$214000 = 12000(1 + i)^{10}$

$\frac{214000}{12000} = (1 + i)^{10}$

$\sqrt[10]{\frac{214000}{12000}} = 1 + i$

$1{,}333899939\ldots - 1 = i$

$0{,}333899939\ldots = i$

$\therefore i = 33{,}389..\%$

Die bevolking groei teen 'n jaarlikse (saamgestelde) koers van 33,4% (korrek tot een desimale plek).

bv. 6 (bepaal n)

Me Gumede sit R3 500 in ’n spaarrekening wat 7,5% p.j. saamgestelde rente betaal. Ná ’n paar jaar is haar rekening R4 044,69 werd. Vir hoe lank het sy die geld belê?

Oplossing

A = R4 044,69 P = R3 500 n = ? i = 7,5% p.a. = 0,075

$A = P(1 + i)^n$

$4\,044,69 = 3\,500(1 + 0,075)^n$

$4\,044,69 = 3\,500(1,075)^n$

$\frac{4044,69}{3500} = (1,075)^n$

$1,155625714 = (1,075)^n$

$n = \log_{1,075} 1,155625714$

$n = 2,000008543$

$n = 2$ jaar

Me Gumede het dus die geld vir 2 jaar belê.

Aktiwiteit 2

1. Marie leen 'n sekere bedrag geld van 'n bank teen 'n saamgestelde rentekoers van 15% kwartaalliks saamgestel. Ná 3 jaar skuld sy nou R7 000. Hoeveel het sy geleen? (3)
2. R1 570 word belê teen 12% p.j. saamgestelde rente. Ná hoeveel jaar sal die belegging R23 000 werd wees? (4)
3. R2 000 is in 'n fonds belê wat rente maandeliks saamgestel betaal. Ná 18 maande was die waarde van die fonds R2 860,00. Bereken die rentekoers. (4)

[11]

Oplossings

1. A = R7000

$i = \frac{0.15}{4}$ ✓

$n = 3 \times 4$

P =?

$7000 = P\left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^{3\times4}$ ✓

$7000 = P(1,555454331)$ ………… Deel albei kante deur 1,555454331

P = R4500,29 ✓ (3)

2.

$A = P(1+i)^n$	vervang vir A, P en i
$23\,000 = 1\,570(1+0,12)^n$ ✓✓	vereenvoudig en deel
$\frac{23000}{1570} = (1,12)^n$	hou die getal op jou sakrekenaar sonder om af te rond
$14,6496\ldots = (1,12)^n$	gebruik log-wette
$n = \log_{1,12} 14,6496\ldots$ ✓	gebruik die log-sleutels op jou sakrekenaar
$n = 23,69$ jaar	$n \approx 24$ jaar tot die naaste jaar ✓ (4)

3. A = 2860 P = 2000 i = ? n = 18

$A = P(1+i)^n$

$2000\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{18} = 2860$ ✓

$\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{18} = \frac{2860}{2000}$ ✓

$1 + \frac{i}{12} = \sqrt[18]{1,43}$

$\frac{i}{12} = 0,020069541$

$i = 0,020069541\ldots$ ✓

$i = 0,2408344924 \times 100$

$i = 24,08\%$ ✓ (4)

[11]

6.3 Enkelvoudige en saamgestelde vervalformules

Verval of **waardevermindering** is wanneer 'n hoeveelheid met 'n persentasie van die huidige bedrag verval. Byvoorbeeld, jou bates (kar, masjinerie) verloor waarde deur ouderdom en gebruik.

Maniere om waardevermindering te bereken.

Enkelvoudige verval of waardevermindering: A = P(1 – ni)

Dit word ook **reguitlyn waardevermindering** genoem want dit kan met 'n reguitlyngrafiek voorgestel word.

bv. 7

'n Kar van R120 0000 verminder waarde teen 'n koers van 12% (enkelvoudige rente) p.j. Hoeveel sal die kar ná 5 jaar werd wees?

Oplossing

$A = P(1 - ni)$ A = ? P = 120 000 $i = 12\% = 0{,}12$ $n = 5$ jaar

$A = 120\,000\,(1 - 5 \times 0{,}12)$

$A = 48\,000$

Die kar sal R48 000 werd wees ná 5 jaar.

Saamgestelde verval of waardevermindering: A = P(1 – i)^n

Dit word ook waardevermindering op 'n verminderende saldo genoem want die rente word bereken op die bedrag wat oorbly namate dit verminder. Die bedrag wat oorbly is "die verminderende saldo".

bv. 8

'n Kar van R120 000 verminder teen 'n koers van 12% p.j. (op 'n verminderende saldo).

Hoeveel sal die kar ná 5 jaar werd wees?

Oplossing

$A = P\,(1 - i)^n$ A = ? P = 120 000 $i = 12\% = 0{,}12$ $n = 5$ jaar

$A = 120\,000\,(1 - 0{,}12)^5$

$A = 63\,327{,}83002\ldots$

A = R63 327,83 (tot die naaste sent)

***Vergelyk dit met enkelvoudige waardevermindering:

Die kar se waarde is R63 327,83 – R48 000 = R15 327,83 minder op enkelvoudige verval as op saamgestelde verval.

Aktiwiteit 3

Die waarde van 'n stuk masjinerie verminder van R10 000 na R5 000 in 4 jaar. Wat is die koers van vermindering, korrek tot twee desimale plekke, indien dit bereken word op die:

a) Reguitlynmetode (d.i. enkelvoudige waardevermindering) (3)

b) Verminderende saldo (d.i. saamgestelde waardevermindering) (3)

[6]

Oplossings

a) A = 5 000   P = 10 000 $n = 4$

i =? <u>Neem kennis:</u> A is minder as P

Reguitlynmetode:

$A = P(1 - ni)$

$5\,000 = 10\,000\,(1 - 4i)$ ✓

$\frac{5000}{10000} = (1 - 4i)$ ✓

$0,5 - 1 = -4i$

$\frac{-0,5}{-4} = i$

$0,125 = i$

$i = 12,5\%$ ✓ (3)

b) Verminderende saldo:

$A = P\,(1 - i)^n$

$5\,000 = 10\,000(1 - i)^4$ ✓

$\frac{5000}{10000} = (1 - i)^4$ ✓

$0,5 = (1 - i)^4$

$\sqrt[4]{0,5} = 1 - i$

$i = 1 - 0,8408\ldots$

$i = 0,1591035\ldots$

$i = 15,9\%$ ✓ (3)

[6]

6.4 Nominale en effektiewe rentekoerse

1. ’n **Nominale rentekoers is die gekwoteerde rentekoers.**
2. ’n **Effektiewe rentekoers** is die werklike rentekoers wat ontvang word. As jy ’n kwotasie kry van ’n nominale rentekoers van 8% p.j., sal die gevolglike **effektiewe** koers verskil afhangende of dit jaarliks, maandeliks of halfjaarliks uitgewerk word.
3. Ons gebruik die volgende formule om die effektiewe rentekoers vanaf die nominale rentekoers te bereken of omgekeerd:

$$1 + i^{\text{effektiewe}} = \left(1 + \frac{i^{\text{nominale}}}{k}\right)^{k}$$

As k die aantal kere per jaar is wat die rente bereken word.

bv. 9

1. Jy leen R500 teen 8% p.j. saamgestel vir een jaar. Aan die einde van die jaar skuld jy $500(1+ 0{,}08)^{1} = \text{R } 540$
2. Jy leen R500 teen 8% p.j. maandeliks saamgestel vir een jaar.
   Aan die einde van die jaar skuld jy $500\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{1\times 12} = \text{R}541{,}50$
   Dus word jy effektiewelik R41,50 rente op R500 gevra.
   Jou rentekoers is in werklikheid $\frac{\text{R}41{,}50}{\text{R}500} \times \frac{100}{1} = 8{,}3\%$.
   Dus is die effektiewe rentekoers 8,3% p.j. maar die nominale rentekoers is 8% p.j.
3. Wat is die effektiewe rentekoers as 7,5% p.j. maandeliks bereken word?

Oplossings

$1 + i^{\text{effektiewe}} = \left(1 + \frac{0{,}075}{12}\right)^{12}$

$1 + i^{\text{effektiewe}} = 1{,}07763$

$i^{\text{eff}} = 0{,}07763$

$\therefore i^{\text{eff}} = 7{,}76\%$

Aktiwiteit 4

1. Khosi wil R5 000 vir 3 jaar belê. Wat is die beter belegging vir haar: as die rente 10,5% p.j. kwartaalliks saamgestel is óf 10,5% p.j. maandeliks saamgestel? (7)

2. Herlei 'n nominale rentekoers van 9% per jaar halfjaarliks saamgestel na die effektiewe jaarlikse rentekoers. (2)

[9]

Oplossings

1.

Eerste opsie: A = ? P = R5 000 $i = \frac{0{,}105}{4}$ ✓ $n = 3 \times 4$

$A = P(1 + i)^n$

$A = 5\,000\left(1 + \frac{0{,}105}{4}\right)^{3\times4}$ ✓ Gebruik 'n sakrekenaar om die hele antwoord uit te werk.

A = R6823,51 ✓

Tweede opsie: A = ? P = R5 000 $i = \frac{0{,}105}{12}$ ✓ $n = 3 \times 12$

$A = P(1 + i)^n$

$A = 5000\left(1 + \frac{0{,}105}{12}\right)^{3\times12}$ ✓ Gebruik 'n sakrekenaar om die hele antwoord uit te werk.

A = R6 841,92 ✓

$\therefore$10,5% maandeliks saamgestel gee vir Khosi 'n beter rente op haar belegging. ✓ (7)

2. $1 + i^{\text{effektiewe}} = \left(1 + \frac{i^{\text{nominale}}}{k}\right)^k$ as k die aantal kere per jaar is wat die rente bereken word.

$1 + i = \left(1 + \frac{0{,}09}{2}\right)^2$ ✓

$1 + i = 1{,}092025 \ldots$

$i = 0{,}092025$

$\therefore$9,20% is die effektiewe jaarlikse rentekoers. ✓ (2)

[9]

6.5 Beleggings met veranderinge in tyd en rentekoers

Berekenings van meer as een rente, deposito's en ontrekkings word die beste met 'n tydlyn gedoen.

bv. 10

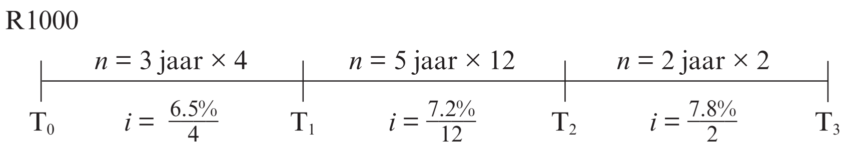
Thabo belê R1 000 in 'n bank vir 10 jaar. Die rentekoers was 6,5% kwartaalliks saamgestel vir die eerste 3 jaar. Vir die volgende 5 jaar is die rente bereken teen 7,2% maandeliks saamgestel en vir die res van die belegging was die rente teen 7,8% halfjaarliks saamgestel.

Hoeveel geld sal Thabo aan die einde van die belegging hê?

Oplossing

Teken eers 'n tydlyn sodat jy die vraag verstaan.

Oor 10 jaar het die rentekoerse oor verskillende tydperke verskil.



Dit kan alles met een berekening uitgewerk word of jy kan aparte berekeninge doen. Onthou om nie jou antwoorde af te rond tot aan die einde nie sodat jy akkurate antwoorde kan hê.

METODE 1

$A = 1000\left(1+\frac{0.065}{4}\right)^{3\times4}\left(1+\frac{0.072}{12}\right)^{5\times12}\left(1+\frac{0,078}{2}\right)^{2\times2}$ ✓✓✓

$= R2024,64$ ✓

METODE 2

Tyd$_1$: $A = 1000\left(1+\frac{0,065}{4}\right)^{3\times4} = R1\ 213,407579$ ✓

Hierdie bedrag van R1 213,407579 word P vir die volgende berekening.

Tyd$_2$: $A = 1213,407579\left(1+\frac{0,072}{12}\right)^{5\times12} = R1\ 737,342911$ ✓

Hierdie bedrag van R1 735,911122 word P vir die volgende berekening.

Tyd$_3$: $A = 1\ 737,342911\left(1+\frac{0,078}{2}\right)^{2\times2} = R2\ 024,64$ ✓

Ná 10 jaar sal Thabo R 2 024,64 kry (tot die naaste sent) ✓

NOTA: Afronding is slegs op die finale antwoord gedoen. **[8]**

Aktiwiteit 5

Mnr. Sithole belê R50 000 in ’n rekening wat 8% p.j. rente aanbied kwartaalliks saamgestel vir die eerste 18 maande. Die belegging verander dan na 6% p.j. maandeliks saamgestel. Twee jaar ná die geld belê is, word R10 000 onttrek. Hoeveel geld sal ná 4 jaar in die rekening wees?

[5]

Oplossing

Teken ’n tydlyn. Die totale tydperk is 4 jaar.

deponeer R50 000 **onttrek** R10 000

jaar T_0 1,5 jaar × 4 0,5 jaar × 12 2 jaar × 12 T_4

8% ÷ 4 **(kwartaalliks)** 6% ÷ 12 **(maandeliks)** 6% ÷ 12 **(maandeliks)**

METODE 1

DEPOSITO vir die tydperk van 4 jaar

$A = 50000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{1.5\times4}\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{2.5\times12} - 10000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{2\times12}$ ✓✓✓✓

=R54 124,66 ✓

OF

METODE 2

Eerste 18 maande ($\frac{18}{12}$ =1,5 jaar):

P = R50 000 i = 8% kwartaalliks saamgestel = $\frac{0,08}{4}$ n = 1,5 jaar × 4

$A = 50000\left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{1,5\times4}$ = R56 308,12096 ✓✓

Volgende 6 maande (0,5 jaar):

P = R56 308,12096 i = 6%] maandeliks saamgestel = $\frac{0,06}{12}$ n = 0,5 × 12

$A = 56308,12096\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{0,5\times12}$ = R58 018,62143 ✓

R10 000 onttrek, dus bly R48 018,62143 oor as die nuwe P-waarde. ✓

Volgende 2 jaar

P = 48 018,62134 i = 6% maandeliks saamgestel = $\frac{0,06}{12}$ n = 2 × 12

$A = 48018,62134\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{2\times12}$ = R54 124,66 ✓ **[5]**

6.6 Annuïteite

Annuïteite is 'n aantal gelyke paaiemente wat op gereelde intervalle gemaak word en onderworpe is aan 'n rentekoers.

Soorte annuïteite is: Toekomstige waarde annuïteit en Huidige waarde annuïteit.

6.6.1 Gebruik die Toekomstige waarde formule

- Jy kan geld spaar deur elke maand dieselfde bedrag weg te sit om in die toekoms te gebruik. Dit kan gedoen word deur 'n annuïteitsfonds, 'n aftree-annuïteit, 'n spaarrekening of 'n delgingsfonds.

  Saamgestelde rente word op jou spaargeld verdien. Jy sal dus op 'n gegewe tyd in die toekoms die totaal van al jou maandelikse paaiemente sowel as die rente wat elke maand op 'n toenemende maandelikse saldo bereken is, ontvang.

Toekomstige waarde formule

Wanneer jy gelyke **maandelikse paaiemente** betaal om geld vir die toekoms te spaar, kan jy die **toekomstige waarde** formule gebruik.

$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

waar F die totaal is wat aan die einde van die tydperk geakkumuleer het, en

x die maandelikse paaiement

i die rentekoers per jaar

n die aantal paaiemente/betalings is.

Hierdie formule word in die finale eksamen op die **inligtingsblad** gegee.

<u>NOTA:</u> Die formule veronderstel dat paaiemente aan die *einde van die eerste maand* begin.

bv. 11

Sipho beplan om elke maand 'n vaste bedrag van sy salaris te spaar. Hy begin aan die einde van die maand van sy eerste salaris. Die bank bied 'n rentekoers van 4,7% p.j. aan, maandeliks saamgestel.

a) Bepaal die bedrag wat hy elke maand moet spaar as hy aan die einde van 4 jaar R30 000 in sy spaarrekening wil hê.

b) Wat is die totale bedrag rente wat hy ná 4 jaar sal ontvang?

Oplossings

a) Sipho spaar vir die toekoms, so gebruik die toekomstige waarde formule.

F = R30 000 $\qquad$ x is die maandelikse paaiement

$i = 4{,}7\%$ maandeliks saamgestel $= \frac{0{,}047}{12}$ $\qquad$ $n = 4 \times 12 = 48$ maande

$$F = x\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$30000 = \frac{x\left[\left(1+\frac{0{,}047}{12}\right)^{48} - 1\right]}{\frac{0{,}047}{12}}$$

$$30000 \times \frac{0{,}047}{12} = x\left[\left(1+\frac{0{,}047}{12}\right)^{48} - 1\right]$$

$$x = \frac{30000 \times \frac{0,047}{12}}{\left[\left(1 + \frac{0,047}{12}\right)^{48} - 1\right]}$$

$x = 569,30932...$

b) Hy moet elke maand R569,31 spaar vir 4 jaar.
Hy sou R569,31 × 48 maande = R27 326,88 betaal het.
Die totale rente wat hy dus ná 4 jaar sal kry, is
R30 000 – R27 326,88 = R2 673,12

6.6.2 Delgingsfonds

bv. 12

'n Drukkersmaatskappy koop twee drukkers teen 'n koste van R3,2 miljoen.

[Gee alle antwoorde tot die naaste Rand.]

a) Bereken die boekwaarde van hulle drukkers ná 5 jaar as die waardevermindering teen 16% p.j. op 'n verminderende saldo bereken word.

b) Bereken die koste om die drukkers aan die einde van die 5 jaar te vervang as die prys van nuwe drukkers met 8,5% p.j. toeneem.

c) Hoeveel meer sal die maatskappy nodig hê as hulle die ou drukkers teen hulle boekwaarde verkoop en die geld wat hulle kry, gebruik om die nuwe toerusting aan te koop?

d) Die maatskappy stel 'n fonds op om voorsiening te maak om die ou toerusting aan die einde van die 5 jaar te vervang. Hulle deponeer R240 000 aan die einde van die 1ste jaar, R370 000 aan die einde van die 2de jaar, R420 000 aan die einde van die 3de jaar en R500 000 aan die einde van die 4de jaar. Bepaal die totale bedrag wat in die fonds geakkumuleer het aan die einde van die 5 jaar as die rente betaal op geld in die fonds 11,5% p.j. jaarliks saamgestel is.

e) Hoeveel geld het hulle addisioneel nodig om die vervangings-drukkers aan die einde van die vervangingstydperk te koop?

Oplossings

a) P = R3 200 000 $\quad i = 16\% = 0,16 \quad n = 5$
$A = P(1 - i)^n$
$A = 3\ 200\ 000\ (1 - 0,16)^5$
A = R1 338 278
Boekwaarde van R1 338 278

b) P = R3 200 000 $\quad i = 8,5\% = 0,085 \quad n = 5$
$A = P(1 + i)^n$
$A = 3\ 200\ 000\ (1 + 0,085)^5$
A = R4 811 701
Koste om drukkers te vervang

c) 4 811 701 – 1 338 278 = R3 473 423
Hulle het R3 473 423 nodig

d) tydlyn

jaar 0	1	2	3	4	5
deposito	R240 000	R370 000	R420 000	R500 000	

<u>Einde van jaar 2:</u>
P = R240 000 $\quad$ i = 11,5% p.a. = 0,115 $\quad$ n = 1
A = P $(1 + i)^n$
A = 240 000 $(1 + 0{,}115)^1$ = R267 600
R267 600+ R370 000 = R637 600

<u>Einde van jaar 3:</u>
A = 637 600 $(1 + 0{,}115)^1$ = R710 924
R710 924 + R420 000 = R1 130 924

<u>Einde van jaar 4:</u>
A = R1 130 924 $(1 + 0{,}115)^1$ = R1 260 980,26
R1 260 980,26 + 500 000 = R1 760 980,26

<u>Einde van jaar 5:</u>
A = 1 760 980,26 $(1 + 0{,}115)^1$ = R1 963 492,99
Ná 5 jaar sal hulle R1 963 492,99 in die fonds hê.

e) R4 811 701 – R1 963 492,99 – R1 338 278 = R1 509 930,01 is steeds nodig vir die nuwe drukkers.

Aktiwiteit 6: Interpreteer 'n grafiek

1. Ntsako belê R50 000 teen 14% p.j. jaarliks saamgestel. Liz spaar R50 000 teen 13,7% p.j. maandeliks saamgestel.

a) Wie het aan die einde van die 20 jaar die meeste geld?

b) Bereken die verskil in hulle beleggings ná 20 jaar.

[6]

Oplossings

1. a) Ntsako: A = 50 000$(1 + 0{,}14)^{20}$ ✓ = R687 174,49 ✓

Liz: A = $50000\left(1 + \frac{0{,}137}{12}\right)^{20\times12}$ = R762421,9984 = R762 422,00 ✓✓

Liz het die meeste geld. ✓

b) Die verskil is R762 422,00 – R687 174,49 = R75 247,51. ✓ **[6]**

6.6.3 Gebruik die Huidige waarde formule

- Jy kan 'n groot bedrag geld by die bank leen. Dit word 'n **lening** genoem. Byvoorbeeld, daar is studentelenings vir verdere studies, voertuiglenings om 'n kar te koop en huislenings om 'n huis te koop.
- 'n **Verband** of 'n **huislening** is 'n lening wat gebruik word om 'n huis of ander eiendom te koop.
- Die bedrag wat jy moet terugbetaal is die totaal van die lening en die rente wat daarop gehef word. Jy moet 'n gelyke bedrag elke maand terugbetaal wat 'n maandelikse paaiement genoem word.

Elke maand word die rente bereken op die bedrag wat jy nog skuld. Omdat jy elke maand dieselfde bedrag terugbetaal, verminder die bedrag wat jy skuld.

Hier is 'n formule om jou maandelikse paaiemente uit te werk. Dit word die **huidige waarde formule** genoem. Dit is *huidig* want jy ontvang die geld nou, huidiglik. Jy begin dit aan die einde van die eerste maand van die lening terugbetaal.

$P = \frac{x\,[1-(1+i)^{-n})]}{i}$

waar P die huidige waarde is

x die maandelikse paaiement

i die rentekoers p.j.

n die aantal tydperke is wat die lening terugbetaal word

Hierdie formule word in die finale eksamen op die **inligtingsblad** gegee.

bv. 13

'n Lening van R240 000 word oor 5 jaar terugbetaal met gelyke maandelikse paaiemente, en begin een maand nadat die lening toegestaan is.

Neem kennis: dit is normaal om 'n lening een maand nadat dit toegestaan is te begin terugbetaal.

a) Bereken die maandelikse terugbetalings as die rente op die lening 9% p.j. is, maandeliks saamgestel.

b) Die kliënt het finansiële probleme en doen slegs 17 betalings. Bereken die saldo van die lening aan die einde van die 17de maand.

Oplossings

1. a) P= R 240 000; x is die maandelikse paaiement

i = 9% p.a. maandeliks $= \frac{0{,}09}{12}$ $n = 5 \times 12 = 60$

$P = \frac{x\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$240000 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{-60}\right]}{\frac{0.09}{12}}$ ✓✓

$x = \frac{240000\left(\frac{0.09}{12}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{0.09}{12}\right)^{-60}\right]}$ ✓

x = R4 982,0052… ≈ R4 982,01 (tot die naaste sent)

Die maandelikse paaiement is dus R4 982, 01✓

b) P = Saldo op lening x = R4 982,01 $i = \frac{0{,}09}{12}$ ✓

$n = 60 - 17 = 43$ maandelikse paaiemente wat nog betaal moet word ✓

$P = \frac{x\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$P = \frac{4982{,}01\left[1-\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{-43}\right]}{\frac{0{,}09}{12}}$ ✓✓

P = 182 535,4693…

Ná 17 maande skuld hy R 182 535,47 ✓ **[9]**

Aktiwiteit 7

1. Zack neem 'n lening van R25 000 uit by die bank om 'n kar te koop. Die bank vra 'n jaarlikse rentekoers van 11% maandeliks saamgestel. Die paaiemente begin 'n maand nadat hy die geld by die bank gekry het.

a) Bereken sy maandelikse paaiemente as hy die lening oor 'n tydperk van 5 jaar terugbetaal.

b) Bereken die uitstaande saldo van sy lening ná twee jaar (onmiddellik nadat die 24ste paaiement gedoen is). (8)

2. Jill onderhandel 'n lening van R300 000 met 'n bank wat met maandelikse paaiemente van R5 000 en 'n finale paaiement wat minder is as R5 000 terugbetaal moet word. Die terugbetalings begin een maand nadat die lening toegestaan is. Rente is vasgestel op 18% per jaar, maandeliks saamgestel.

a) Bepaal die aantal paaiemente wat nodig is om die lening af te los.

b) Bereken die uitstaande saldo nadat Jill die laaste R5 000 betaal het.

c) Bereken die waarde van die finale paaiement wat Jill moet doen om die lening af te los.

d) Bereken die totale bedrag wat Jill aan die bank terugbetaal het. (13)

[21]

Oplossings

1. a) P = R25 000; i = 11% maandeliks $= \frac{0,11}{12}$ ✓ x is die maandelikse paaiement

$n = 5 \times 12 = 60$

$$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

$$25000 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0,11}{12}\right)^{-60}\right]}{\frac{0,11}{12}} ✓✓$$

$$x = \frac{25000\left(\frac{0,11}{12}\right)}{\left[1-\left(1+\frac{0,11}{12}\right)^{-60}\right]}$$

$x = 543,5605768$

Sy maandelikse paaiement sal R543,56 wees (tot die naaste sent) ✓

b) 5 jaar x 12 maande = 60 maande. Hy moet nog steeds vir 60 – 24 = 36 maande betaal.

P = ? i = 11% maandeliks $= \frac{0,11}{12}$ x = R543,56 $n = 36$ ✓

$$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

$$P = \frac{543,56\left[1-\left(1+\frac{0,11}{12}\right)^{-36}\right]}{\frac{0,11}{12}} ✓✓$$

P = 16602,8718...

Die uitstaande saldo ná twee jaar sal R16 602,97 wees (tot die naaste sent).✓ (8)

2. a) P = 300 000 $\quad x = 5\,000 \quad i = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}015$ ✓ $\quad n = ?$

$P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$ ✓

$300\,000 = \frac{5000[1-(1+0{,}015)^{-n}]}{0{,}015}$ ✓

$300\,000 \times 0{,}015 = 5\,000[1-(1{,}015)^{-n}]$

$\frac{4500}{5000} - 1 = -(1{,}015)^{-n}$

$-(1{,}015)^{-n} = -0{,}1$

$-n = \frac{\log 0{,}1}{\log 1{,}015}$ ✓

$n = 154{,}65$

$\therefore$Aantal paaiemente = 155 ✓

b) Uitstaande saldo = $\frac{5\,000\left[1-(1+\frac{0{,}18}{12})^{-0{,}6541086}\right]}{\frac{0{,}18}{12}}$ ✓✓✓✓

= R3230, 50✓

c) Bedrag betaal in die laaste maand

$= 3230{,}50\left(1 + \frac{0{,}18}{12}\right)$ ✓

= R3278, 96 ✓

d) Totaal terugbetaal

= (154 × 5000) + 3278,96 = R773278,96 ✓ (13)

[21]

Aktiwiteit 8

1. 'n Boer koop 'n trekker vir R450 000.

a) Hoeveel sal die trekker oor 5 jaar werd wees as sy waarde teen 9% per jaar op 'n verminderende saldo verminder? (3)

b) Ná 5 jaar moet die trekker vervang word. In hierdie tyd bly inflasie konstant teen 7% per jaar. Bepaal die koste van 'n nuwe trekker ná 5 jaar. (3)

c) Hy beplan om hierdie trekker teen sy boekwaarde te verkoop en die geld te gebruik om 'n nuwe trekker te koop. Bereken hoeveel geld moet hy in 'n delgingsfonds sit om oor 5 jaar 'n nuwe trekker te koop. (1)

d) Bereken die waarde van die maandelikse paaiement in die delgingsfonds as die rente 8,5% p.j. maandeliks saamgestel oor die volgende 5 jaar is. (4)

2. Timothy koop meubels ter waarde van R10 000. Hy leen die geld op 1 Februarie 2010 by 'n finansiële instelling wat rente hef teen 'n koers van 9,5% p.j. maandeliks saamgestel. Timothy onderneem om maandelikse paaiemente van R450 te betaal. Die ooreenkoms van die lening stel Timothy in staat om hierdie gelyke maandelikse paaiemente vanaf 1 Augustus 2010 te begin betaal.

a) Bereken die totale bedrag wat op 1 Julie 2010 aan die finansiële instelling geskuld word. (2)

b) Hoeveel maande gaan dit neem om die lening terug te betaal? (6)

c) Wat is die saldo van die lening onmiddellik nadat Timothy die 25ste paaiement gedoen het? (4)

3. Bereken hoeveel jaar dit sal neem vir 'n belegging om te verdriedubbel (drie keer so groot te word) as dit teen 12% per jaar halfjaarliks saamgestel belê word. (5)

[28]

Oplossings

1. a) Gebruik saamgestelde verval met P = R450 000, $i = 0{,}09$, $n = 5$ jaar.

$A = P(1 - i)^n$

$A = 450\,000\,(1 - 0{,}09)^5$ ✓✓

$A = 280\,814{,}4653$

Die trekker sal oor 5 jaar R 280 814,47 werd wees. ✓

(Dit is wat sy "boekwaarde" of "rommelwaarde" oor 5 jaar sal wees.) (3)

b) Gebruik saamgestelde rente vir inflasie met P = R450 000, $i = 0{,}07$, $n = 5$ jaar.

$A = P(1 + i)^n$

$A = 450\,000\,(1 + 0{,}07)^5$ ✓✓

$A = 631\,148.2788$

'n Nuwe trekker sal oor 5 jaar R631 148,29 kos. ✓ (3)

c) Koste van 'n nuwe trekker – boekwaarde van ou trekker
= R631 148,29 – R280 814,47
= R350 333,82 in 'n delgingsfonds. ✓ (1)

d) Gebruik die toekomstige waarde formule om vir x op te los.
F = R350 333,82x is die maandelikse paaiement
$i = 8{,}5\%$ maandeliks saamgestel $= \frac{0{,}085}{12}$ $\quad n = 5 \times 12 = 60$ maande

$$F = \frac{x\,[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$350333{,}82 = \frac{x\left[\left(1+\frac{0{,}085}{12}\right)^{60} - 1\right]}{\frac{0{,}085}{12}} \checkmark\checkmark\checkmark$$

$$x = \frac{350333{,}82\left(\frac{0{,}085}{12}\right)}{\left[\left(1+\frac{0{,}085}{12}\right)^{60} - 1\right]}$$

$$x = 4\ 706{,}103568\ldots$$

Die maandelikse paaiement in die delgingsfonds oor die volgende 5 jaar moet R4 706,10 wees (afgerond tot die naaste sent) ✓ (4)

2. a) $A = 10000\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^5$ ✓
= R10 402,15 ✓ (2)

b) $$10\ 402{,}15 = \frac{450\left[1-\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{-n}\right]}{\frac{0{,}095}{12}} \checkmark\checkmark\checkmark$$

$$0{,}183000787 = 1 - \left(\frac{1+0{,}095}{12}\right)^{-n}$$

$$\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{-n} = 0{,}\ 816999213 \checkmark$$

$$\log\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{-n} = \log 0{,}816999213 \checkmark$$

$$-n\log\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right) = \log 0{,}816999213\ldots$$

$n = 25{,}63151282\ldots$
$n = 25{,}63$ maande
$n = 26$ ✓ (6)

c) Saldo uitstaande ná 25 maande
= 25,6315128204… – 25
= 0,6315128204 ✓

$$\text{Saldo uitstaande} = \frac{450\left[1-\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{-0{,}6315128204}\right]}{\frac{0{,}095}{12}} \checkmark\checkmark$$

= R282,36 ✓ (4)

3. Laat x gelyk wees aan P, die belegging in rand.

Dus sal die eindbedrag A drie keer soveel wees: $3x$ Rand.

i = 12% halfjaarliks saamgestel (twee keer 'n jaar) = $\frac{0,12}{2}$ ✓

$A = P(1 + i)^n$

$3x = x\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{n \times 2}$ ✓✓

$\frac{3x}{x} = (1,06)^{2n}$

$3 = (1,06)^{2n}$ gebruik logs om n te bepaal

$2n = \log_{1,06} 3$ ✓

$2n = 18,85$

$n = 9,42708834\ldots$

Dit sal meer as 9 jaar neem, so ons kan sê die antwoord is 10 jaar. ✓

Dit sal 10 jaar neem vir 'n belegging om te verdriedubbel as die rente van 12% halfjaarliks saamgestel word. (5)

[28]

Wat jy moet kan doen:

- Gebruik die enkelvoudige en saamgestelde groeiformules om probleme op te los.
- Gebruik die enkelvoudige en saamgestelde vervalformules om probleme op te los.
- Bereken die effek van verskillende saamgestelde tydperke op die effektiewe rentekoers wanneer die nominale rentekoers gegee is en bereken die nominale rentekoers wanneer die effektiewe rentekoers gegee is.
- Gebruik die huidige waarde formule vir lenings, ens.
- Gebruik die toekomstige waarde formule vir annuïteite, spaargeld, ens.
- Bereken die uitstaande saldo op enige gegewe tyd.
- Bereken die delgingsfonds.

Eenheid 7

Differensiaalrekene

7.1 Gemiddelde gradiënt

Die gradiënt van 'n reguitlyn kan bereken word met m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Aktiwiteit 1

1. **a)** Bepaal die gemiddelde gradiënt van die grafiek van $y = 5x^2 - 4$ tussen $x = -4$ en $x = -1$
   b) Is die funksie toenemend of afnemend tussen $x = -4$ en $x = -1$? (3)
2. Bepaal die gemiddelde gradiënt van die grafiek van $y = 5x^2 - 4$ tussen:
   a) $x = 1$ en $x = 3$
   b) $x = 2$ en $x = 3$
   c) $x = 2{,}5$ en $x = 3$
   d) $x = 2{,}99$ en $x = 3$ (8)
3. **a)** Bereken die gemiddelde gradiënt van die kromme $f(x) = x(x + 3)$ tussen $x = 5$ en $x = 3$.
   b) Wat kan jy aflei oor die funksie f tussen $x = 5$ en $x = 3$? (3)

[14]

wenk

Gebruik die vergelyking van die kromme $y = 5x^2 - 4$ om die y-waardes te bereken.

Gebruik die $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formule om die gradiënt te bereken.

Oplossings

1. a) By $x = -4$

$y = 5(-4)^2 - 4 = 80 - 4 = 76$ ✓

By $x = -1$

$y = 5(-1)^2 - 4 = 5 - 4 = 1$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{76 - 1}{-4 - (-1)} = \frac{75}{-3} = -25$ ✓ (2)

b) Die funksie neem af tussen $x = -4$ en $x = -1$ want die gradiënt is negatief. ✓ (1)

2. a) Die punte by $x = 1$ en $x = 3$ is (1; 1) en (3; 41) ✓

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{41 - 1}{3 - 1} = \frac{40}{2} = 20$ ✓ (2)

b) Die punte by $x = 2$ en $x = 3$ is (2; 16) en (3; 41) ✓

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{41 - 16}{3 - 2} = \frac{25}{1} = 25$ ✓ (2)

c) Die punte by $x = 2{,}5$ en $x = 3$ is (2,5; 27,25) en (3; 41) ✓

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{41 - 27.25}{3 - 2.5} = \frac{13.75}{0.5} = 27.5$ ✓ (2)

d) Die punte by $x = 2{,}99$ en $x = 3$ is (2,99; 40,7) en (3; 41) ✓

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{41 - 40.7}{3 - 2.99} = \frac{0.3}{0.01} = 30$ ✓ (2)

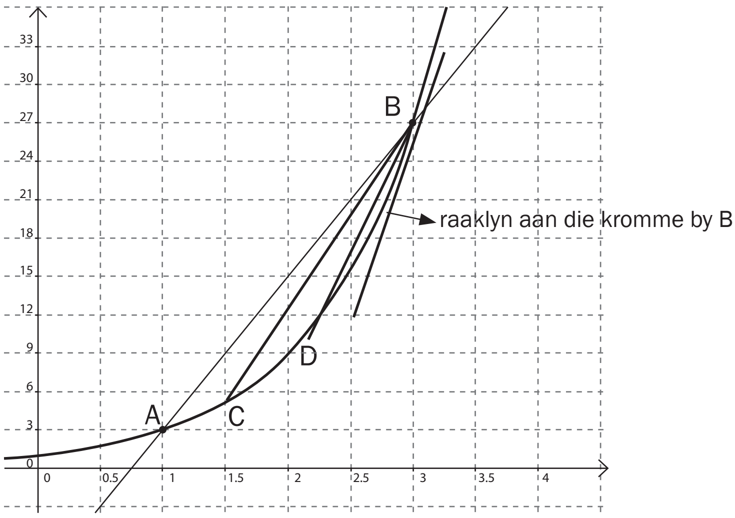
3. a) Die punte by (5; 40) en (3; 18). ✓

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 40}{3 - 5} = \frac{-22}{-2} = 11$ ✓ (2)

b) Die funksie neem toe tussen $x = 5$ en $x = 3$. ✓ (1)

[14]

Kan ons die gradiënt van 'n kromme bereken?



- Die **gemiddelde gradiënt** tussen twee punte op 'n kromme is gelyk aan die **gradiënt van die reguitlyn** deur die punte. Die gemiddelde gradiënt van kromme AB is dus 12.
- Namate die twee punte nader aan mekaar beweeg, nader die gemiddelde gradiënt die gradiënt van die kromme wat ook die gradiënt van die raaklyn aan die kromme by daardie punt is. Die gradiënt van die kromme AB by punt B is dus 30.
- Onthou dat die raaklyn 'n lyn is wat 'n kromme by slegs een punt raak.
- Die gemiddelde gradiënt vertel vir ons of die grafiek toenemend of afnemend is tussen daardie punte.
- As die funksie **afnemend** is tussen twee punte, sal die gemiddelde gradiënt **negatief** wees.
- As die funksie **toenemend** is tussen twee punte, sal die gemiddelde gradiënt **positief** wees.

7.2 Gemiddelde tempo van verandering

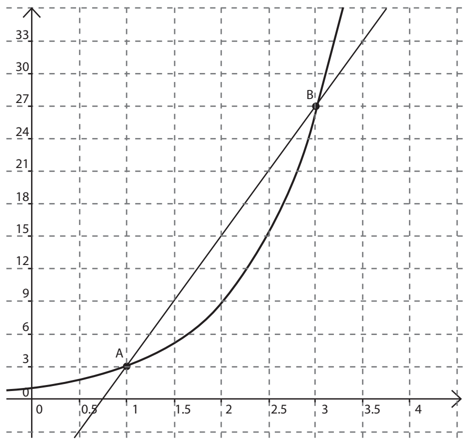
Die gemiddelde tempo van verandering tussen twee punte op 'n grafiek is die gemiddelde gradiënt van die lyn wat die twee punte verbind.

As die grafiek afstand as 'n funksie van tyd aantoon, is die gemiddelde gradiënt $\frac{\text{verandering van afstand}}{\text{veranderingin tyd}}$

Dit is die gemiddelde spoed = $\frac{\Delta \text{ afstand}}{\Delta \text{ tyd}}$

bv. 1

1. Die gemiddelde tempo van verandering tussen A en B aangetoon in die grafiek is $\frac{27-3}{3-1} = \frac{24}{2} = 12$.



2. As die afstand afgelê (in meter) gegee word deur die vergelyking $s(t) = t^2$, waar t die tyd in sekondes is, dan is die gemiddelde spoed tussen t = 3 sekondes en t = 5 sekondes gelyk aan $\frac{5^2 - 3^2}{5-3} = \frac{25-9}{2} = \frac{16}{2} = 8$ m/s.

7.3 Die afgeleide van 'n funksie by 'n punt

Die tempo van verandering van 'n funksie **by 'n punt** word 'n **afgeleide** genoem.

Die afgeleide van 'n funksie by 'n punt gee

- die tempo van verandering van die funksie by die punt
- die helling (gradiënt) van die raaklyn aan die funksie by die punt

Definisie van 'n afgeleide

> Die afgeleide van 'n funksie $y = f(x)$ word gedefinieer
> as $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
> *Hierdie formule word in die finale eksamen op die **inligtingsblad** verskaf.*

> **NOTA:** Die notasie wat ons vir die afgeleide van $y = f(x)$ gebruik is
> $f'(x)$ of y' of $\dfrac{dy}{dx}$ of $D_x[f(x)]$.
> Wanneer ons die afgeleide van 'n funksie bepaal, sê ons ons **differensieer** die funksie.

7.3.1 Die afgeleide vanaf eerste beginsels (Definisie)

Gebruik die formule hieronder om vanaf eerste beginsels (definisie) te differensieer

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

bv. 2

Bepaal $f'(x)$ vanaf eerste beginsels as $f(x) = -3x^2$

Oplossing

Metode 1

$f(x+h) = -3(x+h)^2$

$= -3(x^2 + 2xh + h^2)$

$= -3x^2 - 6xh - 3h^2$ om $f(x+h)$ te kry vervang ons x met $x + h$ en kry $-3(x+h)^2$

Brei die hakies uit en maak seker jy vermenigvuldig die –3 met elke term in die hakies.

Deur in $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ te vervang, gee die definisie van die afgeleide

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3x^2 - 6xh - 3h^2 - (-3x^2)}{h \quad f(x) = -3x^2}$ $\quad f(x) = -3x^2$ dus

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3x^2 - 6xh - 3h^2 + 3x^2}{h}$

Haal 'n gemeenskaplike faktor van h uit sodat jy dit met die h in die noemer kan kanselleer

Namate h nader kom aan 0, gaan $6x - 3h$ nader aan $-6x$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-6x - 3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (-6x - 3h)$$

$$= -6x$$

Aktiwiteit 2

1. Bepaal $f'(x)$ vanaf eerste beginsels as $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$ (6)

2. Bepaal $f'(x)$ vanaf eerste beginsels as $f(x) = \frac{2}{x}$ (6)

[12]

Oplossings

1. $f(x+h) = 5(x+h)^2 - 4(x+h) + 2$

$= 5(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h + 2$

$= 5x^2 + 10xh + 5h^2 - 4x - 4h + 2$ ✓

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 4x - 4h + 2 - (5x^2 - 4x + 2)}{h} \checkmark$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{10xh + 5h^2 - 4h}{h} \checkmark$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(10x + 5h - 4)}{h} \checkmark$$

$$= \lim_{h \to 0} (10x + 5h - 4) \checkmark$$

$$= 10x - 4 \checkmark$$

(6)

2. $f(x+h) = \frac{2}{x+h}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} \checkmark \checkmark$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2x}{x(x+h)} - \frac{2(x+h)}{x(x+h)}}{h} \checkmark$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2x - 2x - 2h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-2h}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} \checkmark$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{x(x+h)} \checkmark$$

$$\simeq \frac{-2}{x(x)} = \frac{-2}{x^2} \checkmark$$

(6)

[12]

7.3.2 Die differensiasiereëls

Jy kan enige afgeleide vanaf eerste beginsels bepaal, maar daar is 'n paar vinnige reëls om die afgeleide te bepaal. **Tensy 'n vraag vir jou vra om die definisie te gebruik of om te "differensieer vanaf eerste beginsels" is dit makliker om die reëls gebruik.**

Jy moet die volgende differensiasiereëls ken en kan gebruik:

Reëls

1. As $f(x) = b$ dan $f'(x) = 0$ waar b 'n konstante is.
2. As $f(x) = x^n$ dan $f'(x) = nx^{n-1}$
3. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$
4. $\frac{d}{dx}[kf(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)]$

bv. 3

As $h(x) = 12$, dan $h'(x) = 0$
Die afgeleide van 'n konstante is altyd = 0.
As $k(x) = x^5$, dan $k'(x) = 5x^4$
As $f(x) = x^5 + x^4$, dan $\frac{d}{dx}f(x) = 5x^4 + 4x^3$
As $f(x) = 3x^5$ dan
$\frac{d}{dx}f(x) = 3 \times \frac{d}{dx}f(x)\ (x^5) = 3 \times 5x^4 = 15x^4$

Voordat jy differensiasie gebruik, moet jy dalk die formaat van die uitdrukkings vereenvoudig of verander:

1. **Brei die hakies uit** bv. brei $(3x + 2)(x - 5)$ na $3x^2 - 13x - 10$ uit want jy het geen differensiasiereël vir 'n produk nie.
   Jy moet dus die terme skei voordat jy kan differensieer.

bv. 4

Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = (3x + 2)(x - 5)$

Oplossing

$f(x) = 3x^2 - 13x - 10$

$\therefore f'(x) = 6x - 13$

2. Skryf terme wat vierkants**wortels**, derdemagswortels of ander wortels is oor as **eksponensiale** sodat jy die reël $f(x) = x^n$ dan $f'(x) = nx^{n-1}$ kan gebruik.

bv. 5

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ dus $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Aktiwiteit 3

a) Evalueer $D_x[(x^3 - 3)^2]$

b) Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) Bepaal $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^5}$

d) Differensieer $f(x)$ as $f(x) = \sqrt{x^4}$

e) Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \sqrt{16x^3}$

[11]

Oplossings	
a) $D_x[(x^3 - 3)^2]$ $= D_x[x^6 - 6x^3 + 9]$ ✓ $= 6x^5 - 18x^2$ ✓ ✓ (3)	Vermenigvuldig Pas die differensiasiereëls toe
b) $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ so $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ✓ ✓ (2)	**c)** $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$ so $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^5}) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ ✓ ✓ (2)
d) $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$ ✓ so $f'(x) = 2x^1 = 2x$ ✓ (2)	**e)** $f(x) = \sqrt{16x^3} = 4(x^3)^{\frac{1}{2}} = 4x^{\frac{3}{2}}$ ✓ So $f'(x) = \frac{3}{2}.4.x^{\frac{3}{2}-1} = 6x^{\frac{1}{2}}$ ✓ (2) Jy kan die antwoord as $6\sqrt{x}$ of $6x^{\frac{1}{2}}$ skryf **[11]**

Skryf terme wat "breuke" is waar x deel is van die noemer, $\frac{1}{x^n}$ oor as x^{-n} sodat jy die reël as $f(x) = x^n$ dan $f'(x) = nx^{n-1}$ kan gebruik.

bv. 6

Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \frac{3x^2}{4x^3}$

Oplossing
$f(x) = \frac{3x^2}{4x^3} = \frac{3}{4}x^{-1}$ So $f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-2} = -\frac{3}{4x^2}$

Aktiwiteit 4

1. Bepaal, met die differensiasiereëls: $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{6x^3}$ (3)

2. Evalueer $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ as $y = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{x^3}{9}$ (3)

3. Bepaal $D_{\mathrm{x}}\left[\frac{6x+5}{3x^2}\right]$ (4)

[10]

Oplossings

1. $y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{6x^3}$

$y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{-3}$ ✓ — Skryf eers die terme in die vorm kx^n

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{6}x^{-4}$ — Gebruik die differensiasiereëls

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-4}$ — Vereenvoudig

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^4}$ ✓ ✓ — Verander terug na wortelvorms en positiewe eksponente (3)

2. $y = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{x^3}{9}$

$y = 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{9}x^3$ ✓ — Skryf eers die terme in die vorm kx^n oor.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot 4\left(x^{-\frac{1}{2}-1}\right) - 3 \cdot \frac{1}{9}x^2$ — Gebruik die differensiasiereëls

$\frac{dy}{dx} = -2x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x}x^2$ ✓ ✓ — Vereenvoudig (3)

Die vraag sal dikwels vir jou vra om die antwoord met positiewe eksponente te gee.

$= -\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{3}x^2$

3. $D_x\left[\frac{6x+5}{3x^2}\right] = D_x\left[\frac{6x}{3x^2} + \frac{5}{3x^2}\right]$ ✓

$= D_x\left[2x^{-1} + \frac{5}{3}x^{-2}\right]$ ✓

$= -2x^{-2} - \frac{10}{3}x^{-3}$ ✓ ✓ (4)

[10]

7.4 Gebruike van die afgeleide

Die afgeleide het baie gebruike.

Dit kan gebruik word om:

- die gradiënt van die vergelyking van 'n raaklyn te bepaal
- stasionêre punte op 'n grafiek te identifiseer
- 'n maksimum- of minimumwaarde te bepaal
- tempo van verandering te beskryf
- grafieke van derdegraadsfunksies te teken
- ('n Derdegraadsfunksie het die vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$)

7.4.1 Bepaal die vergelyking van 'n raaklyn

Die helling van die raaklyn aan die grafiek by 'n punt is gelyk aan die afgeleide van die funksie by daardie punt. Dus, om die vergelyking van die raaklyn aan $f(x)$ by $x = a$ te bepaal, moet ons:

1. Die afgeleide $f'(x)$ bepaal.
2. Die afgeleide by $x = a \rightarrow$ uitwerk, d.i. bereken $f'(a)$ om die gradiënt van die raaklyn te kry.
3. Bereken die y-waarde by $x = a \rightarrow$d.i. bereken $f(a)$.
4. Die raaklyn is 'n reguitlyn.
   Ons kan die vergelyking van 'n reguitlyn bepaal met $y - y_1 = m(x - x_1)$ as ons weet wat die gradiënt m aan 'n punt $(x_1; y_1)$ op die lyn is.

bv. 7

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die funksie $f(x) = x^3 + 2x + 4$ by die punt waar $x = 1$.

Oplossing

$f'(x) = 3x^2 + 2$	**1.** Neem die afgeleide
$f'(1) = 3(1)^2 + 2 = 5$	**2.** Bepaal die gradiënt van die raaklyn by $x = 1$ deur die afgeleide by $x = 1$ te evalueer.
so $m = 5$	
$f(1) = 1 + 2 + 4 = 7$	**3.** Bereken die y-waarde by $x = 1$
Raaklyn: $y - 7 = 5(x - 1)$	**4.** Gebruik $y - y_1 = m(x - x_1)$ om die vergelyking van die raaklyn te gee

$y - 7 = 5x - 5$

$y = 5x + 2$

Die vergelyking van die raaklyn by $x = 1$ is dus $y = 5x + 2$

7.5 Teken die grafiek van 'n derdegraadspolinoom

Enige derdegraadspolinoom is 'n funksie van die vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en ons kan dit met 'n grafiek voorstel. Om die grafiek te teken, moet ons die eienskappe van die grafiek bepaal.

- Ons kan die afgeleide gebruik om die helling van die grafiek by sekere punte te identifiseer.
- Ons moet ook weet hoe om vergelykings in die derdegraad op te los, so ons moet die x- en y-afsnitte van die grafiek bepaal.

7.5.1 Los vergelykings in die derdegraad op: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

bv. 8

Werk deur hierdie voorbeeld:
Faktoriseer en los op vir x: $x^3 - x^2 - 5x = 3$

Oplossings

1. Kry $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ d.i. $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ (standaardvorm)

2. Gebruik die **res en faktorstelling** om een faktor te bepaal.
Gebruik probeer en tref.
Hierdie stap kan ook op 'n sakrekenaar bereken word – sien hieronder:

> Die faktorstelling stel:
> ***As $f(k) = 0$, dan is $x - k$ 'n faktor van $f(k)$***

Dus as $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$, wil ons 'n x-waarde bepaal wat $f(x) = 0$ maak.

$f(x)$ het 'n konstante waarde van -3.

As hierdie uitdrukking gefaktoriseer kan word, sal ten minste een van sy faktore 'n faktor van -3 daarin gebruik.

Die faktore van -3 is -3; -1; 1; 3

Deur probeer en tref, toets hierdie faktore om die waarde van x te bepaal wat $f(x) = 0$ gee.

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

As $x = -3$, dan $f(-3) = -27 - 9 + 15 - 3 = -24 \neq 0$

As $x = -1$, dan $f(-1) = -1 - 1 + 5 - 3 = 0$

$\therefore x - (-1)$ is 'n faktor van $f(x)$

$\therefore x + 1$ is 'n faktor van $x^3 - x^2 - 5x - 3$.

Ons gebruik $x + 1$ om die ander faktore te bepaal.

3. Deel $x^3 - x^2 - 5x - 3$ deur $x + 1$ om die ander faktore te bepaal.
Jy kan op hierdie stadium die algebraïese metode, langdeling of sintetiese deling gebruik.

Metode I: Gebruik algebra

$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 + px - 3)$

<u>Kontroleer dit:</u> Eerste terme gee x^3, laaste terme gee -3.

Ons weet nie wat die middelterme is nie, so ons het px in die tweede hakie gebruik.

Om die waarde van p te bereken:

Die x^2 term in die uitdrukking het 'n koëffisiënt van –1

Dus moet die x^2 deel van die gefaktoriseerde uitdrukking $-x^2$ maak

$x^3 - x^2 - 5x - 3$

$(x + 1)(x^2 + px - 3)$

$x(px) + 1(x^2) = px^2 + x^2$

$\therefore px^2 + x^2 = -x^2$

$px^2 = -2x^2$

$\therefore p = -2$

$\therefore x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3)$

Metode II: Langdeling [Deel, vermenigvuldig, trek af, bring af]

	$x^2 - 2x - 3$	
$x + 1$	$x^3 - x^2 - 5x - 3$	Deel: $x^3 \div x$ Antwoord x^2 bo
	$x^3 + x^2$	Vermenigvuldig: $x^2(x + 1)$
	$-2x^2 - 5x$	Trek af en bring af
		Deel: $-2x^2 \div x$ Antwoord $-2x$ bo
	$-2x^2 - 2x$	Vermenigvuldig: $-2x(x + 1)$
	$-3x - 3$	Trek af en bring af
	$-3x - 3$	Deel: $-3x \div x$ Antwoord -3 bo
		Vermenigvuldig: $-3(x + 1)$
	0	Trek af

$\therefore x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3) = (x + 1)(x - 3)(x + 1)$

Metode III: Sintetiese deling

Skryf die koëffisiënt van die terme in die oorspronklike vergelyking neer, $x^3 - x^2 - 5x - 3$.

a) Skryf $x = -1$ aan die linkerkant

–1	1	–1	5	–3

b) Skryf die eerste koëffisiënt (1) neer en vermenigvuldig

$-1 \times 1 = -1$

Skryf dit onder die 2de koëffisiënt (–1)

	1ste koëff	2de koëff	3de koëff	4de koëff
–1	1	–1	–5	–3
	1	–1		

antwoord

d) Vermenigvuldig –1 met –3 = +3

Sit dit onder die 4de koëffisiënt (–3)

Tel die 4de kolom op: $-3 + 3 = 0$

	1ste koëff	2de koëff	3de koëff	4de koëff
–1	1	–1	–5	–3
	1	–1	+2	+3
		–2	–3	0

Tel die tweede kolom op: $-1 + -1 = -2$

	1^{ste} koëff	2^{de} koëff	3^{de} koëff	4^{de} koëff
-1	1	-1	-5	-3
	1	-1		
		-2		

c) Vermenigvuldig -1 met $-2 = +2$
Sit dit onder die derde koëffisiënt (-5)
Tel die derde kolom op: $-5 + 2 = -3$

	1^{ste} koëff	2^{de} koëff	3^{de} koëff	4^{de} koëff
-1	1	-1	-5	-3
	1	-1	$+2$	
		-2	**-3**	

1. Jy weet jy is reg wanneer die finale som 0 is. Hierdie getalle vorm die koëffisiënte van die antwoord van die deling:

	1^{ste} koëff	2^{de} koëff	3^{de} koëff	4^{de} koëff
-1	1	-1	-5	-3
	1	-1	$+2$	$+3$
		-2	**-3**	0

$1x^2 - 2x - 3$

$\therefore x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3)$
$= (x + 1)(x - 3)(x + 1)$

Nou het jy die eerste faktor $(x + 1)$ bepaal deur een van die drie metodes te gebruik.

4. Faktoriseer die antwoord verder deur die trinoom te faktoriseer.
$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3) = (x + 1)(x - 3)(x + 1)$

5. Bepaal die drie oplossings.
As $(x + 1)(x - 3)(x + 1) = 0$,
Dan $(x + 1) = 0$ of $(x - 3) = 0$ of $(x + 1) = 0$
$x = -1$ of $x = 3$ of $x = -1$
Dit is die x-afsnitte van 'n derdegraadsgrafiek met die vergelyking: $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

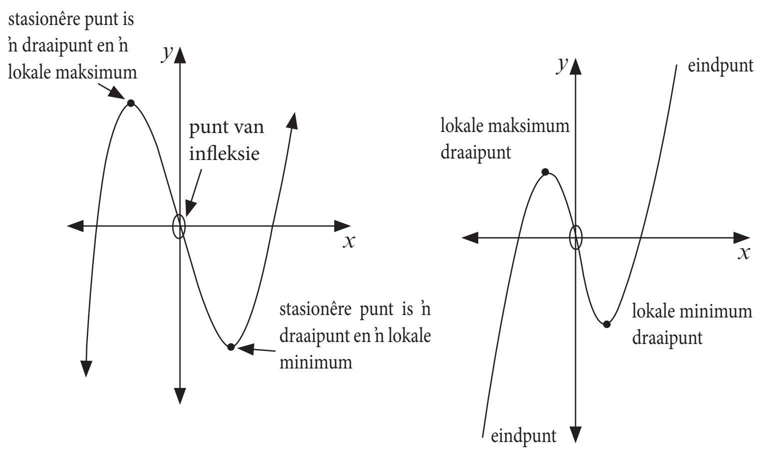
7.5.2 Stasionêre punte van 'n derdegraadsfunksie

- **Stasionêre punte** op 'n grafiek is punte waar die **gradiënt van die grafiek 0 is.** Dit is by punte waar die rigting van die kromme van die grafiek verander.
  Op 'n derdegraadsfunksie, is die stasionêre punte by 'n lokale **maksimum**- of **minimumdraaipunt.** Daar is ook situasies waar 'n punt van infleksie 'n stasionêre punt kan wees, soos aangedui in Figuur 2 van die voorbeeld hieronder.
  NOTA: 'n Punt van infleksie is nie altyd 'n stasionêre punt nie.

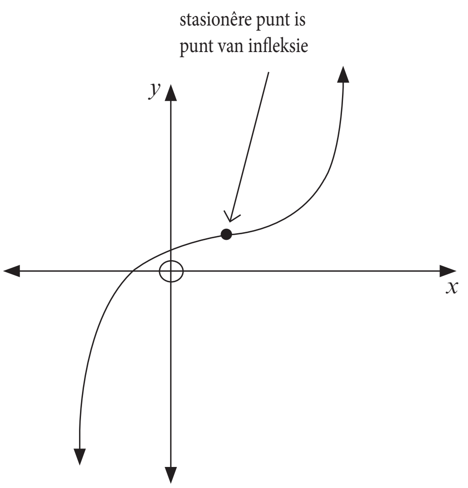
bv. 9

Die draaipunte is slegs *lokaal* want die eindpunte van die grafieke is dikwels groter as die lokale maksimum of minder as die lokale minimum.

Figuur 1



Figuur 2



Die afgeleide $f'(x)$ gee vir ons die helling van 'n grafiek.

Om die koördinate van die draaipunte van 'n funksie $f(x)$, te bepaal, moet ons $f'(x) = 0$ oplos.

Om die koördinate van die punt van infleksie te bepaal, moet mens die *afgeleide van die afgeleide*, $f''(x)$. bepaal. Dit word die tweede afgeleide genoem. Los op vir $f''(x) = 0$.

7.5.3 Teken die grafiek van ’n derdegraadsfunksie

Om ’n grafiek van ’n derdegraadsfunksie te teken, volg hierdie stappe:

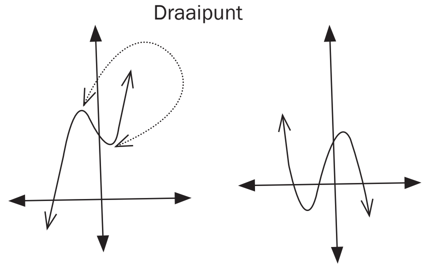
Jy moet die stappe leer om `n derdegraadse polinoom te teken!

1. Bepaal die **y-afsnit** deur $f(0)$ te bepaal. Wanneer $x = 0$, wat is die waarde van y?
2. Bepaal die **x-afsnitte** deur die x-waarde(s) te bepaal waar $f(x) = 0$. Faktoriseer $f(x)$ om hierdie waardes uit te werk.

   Identifiseer een faktor met die **faktorstelling.**

   Die faktorstelling: As $f(k) = 0$, dan is $x - k$ ’n faktor van $f(x)$.
3. Bepaal die **stasionêre punte of draaipunt** deur $f'(x) = 0$ op te los.

   NB: Die drie stappe wat hierbo aangedui word, is baie belangrik. ’n Sketsgrafiek moet al die bogenoemde punte met korrekte identifikasie van die vorm soos hieronder verduidelik, aantoon.
4. Identifiseer die **eindgedrag**, d.i. identifiseer wat met die grafiek gebeur vir baie groot positiewe en negatiewe waardes van x.
   - As $a > 0$, dan is $f(x)$ positief vir baie groot waardes van x en negatief vir baie groot negatiewe waardes van x.
   - As $a < 0$, dan is $f(x)$ negatief vir baie groot waardes van x en positief vir baie groot negatiewe waardes van x.



'n Positiewe derdegraadsfunksie $a > 0$

'n Negatiewe derdegraadsfunksie $a < 0$

bv. 10

Skets die grafiek van $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$.

1. ***y*-afsnit:** Wanneer $x = 0$, $f(0) = 30$, dus die y-afsnit is by $(0; 30)$.
2. ***x*-afsnitte:** Toets ’n paar waardes vir x (kies faktore van 30)

   $f(1) = 16$ dus $(x - 1)$ is nie ’n faktor nie. $f(-1) = 36$ dus $(x + 1)$ is nie ’n faktor nie.

   $f(2) = 0$ dus $(x - 2)$] is ’n faktor.

Kies Metode I, II of III op bl. 132-133 om voort te gaan. Hier is die sintetiese metode. Hierdie metode is baie vinnig sodra jy dit akkuraat kan gebruik.

	1ste koëff	2de koëff	3de koëff	4de koëff
2	1	–4	–11	30
	1	2	–4	–30
		–2	**–15**	0

$\therefore x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - 2)(x^2 - 2x - 15)$

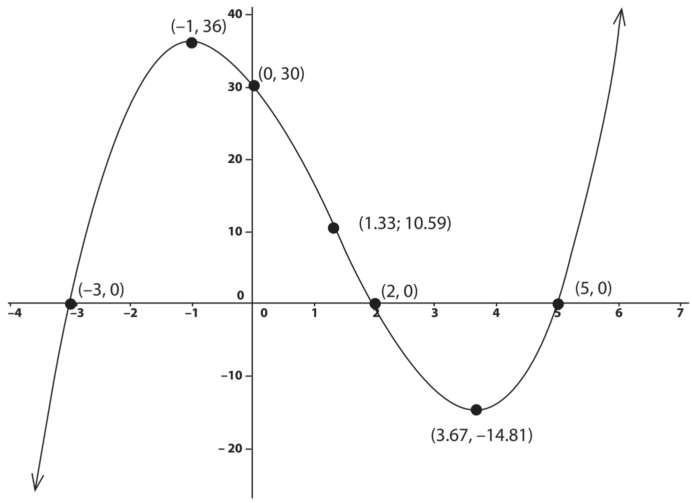
$\therefore x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x - 2)(x - 5)(x + 3)$ Faktoriseer die trinoom

Dus, wanneer $y = 0$, $(x - 2) = 0$ of $(x - 5) = 0$ of $(x + 3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = 5$ of $x = -3$.

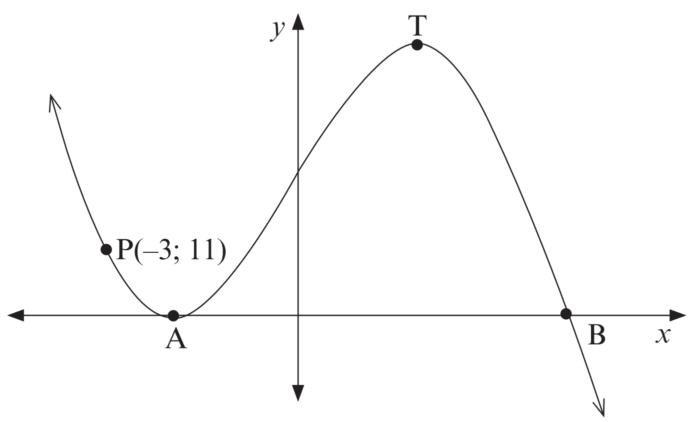
x-afsnitte is by $x = 2$, $x = 5$ of $x = -3$ d.i (2; 0) ; (5; 0) of (-3; 0)

3. **Stasionêre punte of draaipunte:**
$f'(x) = 3x^2 - 8x - 11$
Wanneer $f'(x) = 0$, dan $3x^2 - 8x - 11 = 0$
$(x + 1)(3x - 11) = 0$
$x = -1$ of $x = \frac{11}{3}$
y-waardes by stasionêre punte: $f(-1) = -1 - 4 + 11 + 30 = 36$ en
$f\left(\frac{11}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}\right)^3 = 4\left(\frac{11}{3}\right)^2 - 11\left(\frac{11}{3}\right) + 30 \approx -14.81 \therefore (-1;36)$
en $\left(\frac{11}{3}; -14.81\right)$
4. **Punt van infleksie:**
$f'(x) = 3x^2 - 8x - 11$
$f''(x) = 6x - 8$
$6x - 8 = 0$ waar $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, dus is die punt van infleksie by $x = \frac{4}{3}$
y-waarde by punt van infleksie:
$f\left(\frac{4}{3}\right) = 10{,}59. \therefore \left(\frac{4}{3}; 10{,}59\right)$
5. Eindgedrag: $a > 0$ is positief vir baie groot waardes van x en negatief vir baie groot negatiewe waardes van x.
6. Stip die punte en die eindgedrag. Verbind die punte in 'n gladde kromme.



Aktiwiteit 5

1. $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 10$
   a) Skryf die koördinate van die y-afsnit van f neer.
   b) Toon aan dat (2; 0) die enigste x-afsnit is.
   c) Bereken die koördinate van die draaipunte van f.
   d) Skets die grafiek van f. Toon alle afsnitte met asse en alle draaipunte aan.
   e) Bepaal die punt van infleksie. (17)
2. Hieronder is die grafiek van $g(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20 = -(2x - 5)(x + 2)^2$ geskets. A en T is draaipunte van g. A en B is die x-afsnitte van g. P(–3; 11) is 'n punt op die grafiek.



a) Bepaal die lengte van AB.
b) Bepaal die x-koördinaat van T.
c) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan g by P(–3; 11) in die vorm $y = \ldots$
d) Bepaal die waarde(s) van k waarvoor $-2x^3 - 3x^2 + 12x + 20 = k$ drie duidelike wortels het.
e) Bepaal die x-koördinaat van die punt van infleksie. (14)

[31]

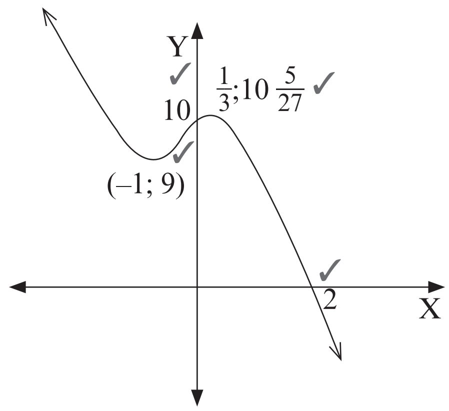
Oplossings

1. a) Wanneer $x = 0$, $y = 10$, daarom is (0; 10) ✓ (1)

b) Deur aan te neem dat (2; 0) die x-afsnit is, dan is $x - 2$ 'n faktor van $f(x)$
$f(x) = -x^3 - x^2 + x + 10 = (x - 2)(-x^2 - 3x - 5)$ ✓✓
$\therefore x - 2 = 0$ of $-x^2 - 3x - \ = 0$ ✓
$x = 2$ maar $-x^2 - 3x - 5 = 0$ het geen reële oplossing nie.
Derhalwe is $(x - 2)$ die enigste x-afsnit. ✓✓ (5)

c) By die draaipunt $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = 0$ ✓
$(-3x + 1)(x + 1) = 0$
$x = \frac{1}{3}$ of $x = -1$ ✓✓
Wanneer $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 10 = \frac{270 - 3 + 9 - 1}{27} = \frac{275}{27} = 10\frac{5}{27}$
Daarom is die draaipunt $\left(\frac{1}{3}; \frac{275}{27}\right) = \left(\frac{1}{3}; 10\frac{5}{27}\right)$ ✓
Wanneer $x = -1$, $y = 1 - 1 - 1 + 10 = 9$
Daarom is die draaipunt $-(1; 9)$ ✓ (5)

d)



(4)

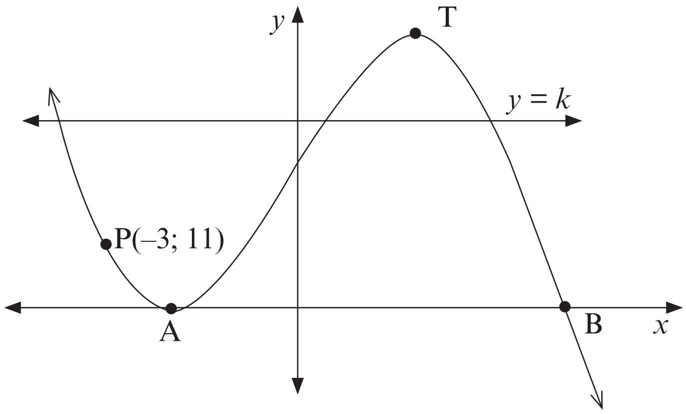
e) By die punt van infleksie $f''(x) = -6x - 2 = 0$ ✓
$\therefore$ by $x = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ ✓ (2)

2. a) Aangesien A en B die x-afsnitte van g is, is dit oplossings van $-(2x - 5)(x + 2)^2 = 0$ ✓
d.i. $x = -2$ en $x = \frac{5}{2}$ Die afstand tussen –2 en $\frac{5}{2}$ is $\frac{5}{2} - (-2) = 4{,}5$ eenhede ✓ (2)

b) T is 'n draaipunt. $g'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = 0$. ✓
$-6(x^2 + x - 2) = 0$
$-6(x + 2)(x - 1) = 0$
Wanneer $x = -2$ of $x = 1$. ✓✓
Dus is die x-koördinaat van T gelyk aan 1. (3)

c) $g'(3) = -6(-3)^2 - 6(-3) + 12 = -24$ ✓
Dus is die vergelyking van die raaklyn $y - 11 = -24(x + 3)$ ✓
wat vereenvoudig na $y = -24x - 61$ ✓ (3)

d) Die grafiek van $y = k$ word saam met $g(x)$ hieronder aangetoon.
Deur hierdie grafieke te gebruik, kan ons sien dat, mits die lyn bo die y-waarde van A en onder dié van T lê, die vergelyking $-2x^3 - 3x^2 + 12x + 20 = k$, drie duidelike wortels sal hê.
By T, $g(1) = -2 - 3 + 12 + 20 = 27$. Dus vir $0 < k < 27$ het die vergelyking 3 duidelike wortels. ✓✓✓✓ (4)



e) $g''(x) = -12x - 6$
$-12x - 6 = 0$ wanneer $x = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$ ✓✓ (2)

[31]

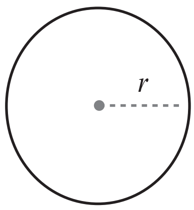
7.5.4 Bepaal die maksimum of minimum

$f'(x) = 0$ wys vir ons die lokale maksimum- of minimumpunte. Ons kan dit gebruik om 'n toegepaste probleem op te los wat vir 'n maksimum- of minimumwaarde vra.

Hierdie is hersiening van Graad 10 werk wat jy nodig het om party Graad 12 vrae oor meting, volume, maksima en minimums te beantwoord. Jy moet hierdie formules ken en dit gebruik om probleme op te los.

2-D vorms	**3-D vorms** Regte prismas	**3-D vorms** Waar die basis 'n poligoon is en die sye by een punt ontmoet, die hoekpunt.
Oppervlakte en omtrek (Die afstand om die buitekant)	**V = Oppervlakte van basis × ⊥ hoogte** **&** **Buite-oppervlakte = die som van die oppervlaktes van die plat vorms**	*V* = $\frac{1}{3}$ *Oppervlakte van basis* × ⊥ *hoogte* = $\frac{1}{3} A \times H$ *Waar H die loodregte hoogte is* *en* *Buite-oppervlakte = Oppervlakte van basis +* $\frac{1}{2}ph$ *waar p die omtrek van die basis is en h die skuinshoogte*

1. Sirkel

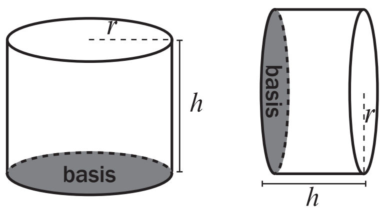


$A = \pi r^2$

$Omtrek\ = 2\pi r$

$Omtrek\ = 2\pi r$

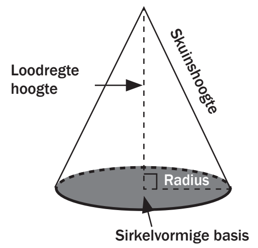
1. Regte silinders



$V = \pi r^2 \times h$

$Buite\text{-}oppervlakte = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

1.Keëls

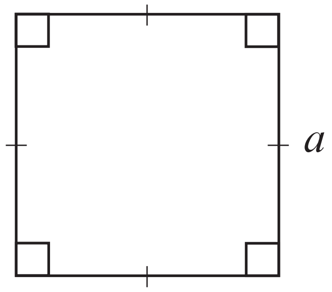


$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times H$

$Buite\text{-}oppervlakte = \pi r^2 + \frac{1}{2}(2\pi r \times h)$

$= \pi r^2 + \pi rh$

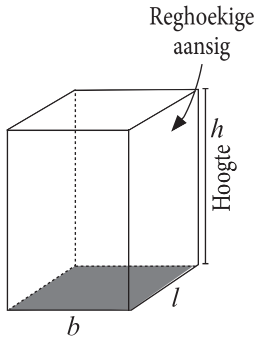
2. Vierkant



A = lengte × lengte = a^2

Omtrek = $4a$

2. Vierkantige prisma

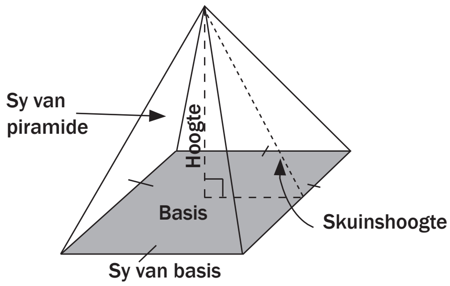


Nota: $l = b = h = a$

$V = a \times a \times a = a^3$

Buite-oppervlakte = $6a^2$

2. Vierkantige piramide



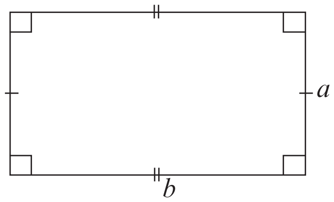
$V = \frac{1}{3}a^2 \times H$

Buite-oppervlakte = oppervlakte van vierkant + 4 × oppervlakte van driehoek

$= a^2 + 4\left(\frac{1}{2} \cdot \text{a} \cdot \text{h}\right)$

$= a^2 + 2ah$

3. Reghoek

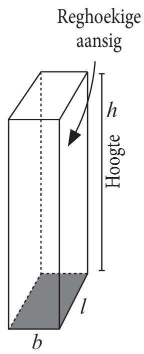


Oppervlakte: A = lengte × breedte

$= ab$

Omtrek = $2a + 2b$

3. Reghoekge prisma



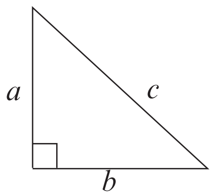
V = $l \times b \times h$

Buite-oppervlakte = $2lb + 2lh + 2bh$

Die **skuinshoogte** loop vanaf die middel van die sy van die basis tot by die hoekpunt.

Ons bereken die skuinshoogte met die loodregte hoogte en die afmetings van die basis met die Stelling van Pythagoras.

4a. Reghoekige driehoek



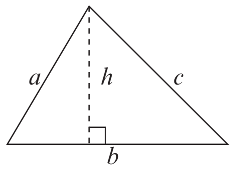
Oppervlakte:

A = $\frac{1}{2} \times$ basis $\times$ hoogte

$= \frac{1}{2} \times b \times a$

Omtrek = $a + b + c$

4b. Driehoek



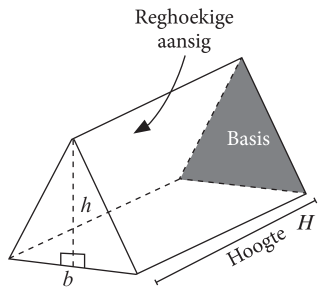
Oppervlakte:

V = $\frac{1}{2} \times$ basis $\times \perp$ hoogte

$= \frac{1}{2} \times b \times h$

Omtrek = $a + b + c$

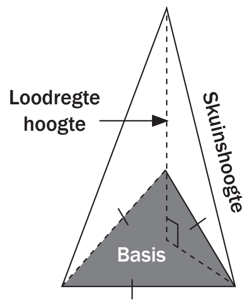
4. Driehoekige prisma



V = $\left(\frac{1}{2} \times b \times h\right) \times H$

Buite-oppervlakte van driehoekige prisma
= 2 $\times$ oppervlakte van driehoek + (som van oppervlaktes van 3 reghoeke)

4. Driehoekige piramide

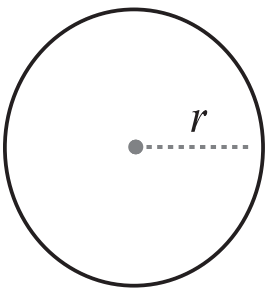


V = $\frac{1}{3}$ oppervlakte van basis driehoek $\times$ H

Buite-oppervlakte = oppervlakte van basis driehoek + (som van oppervlaktes van 3 driehoeke)

2-D vorms

1. Sirkel

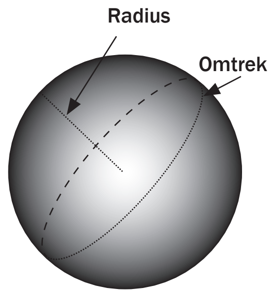


$A = \pi r^2$

Omtrek = $2\pi r$

3-D vorms

1. Sfere



V = $\frac{4}{3} \pi r^3$

Buite-oppervlakte = $4\pi r^2$

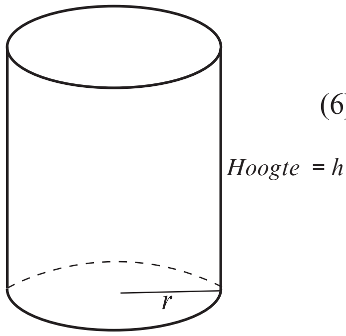
OMSKAKELINGS

1 milliliter = 1 cm^3

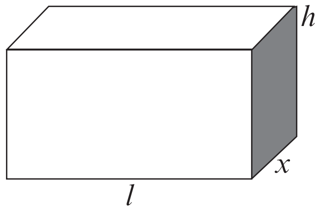
1 m^3 = 1 000 liter

Aktiwiteit 6

1. ’n Drinkglas, in die vorm van ’n silinder (hier aangetoon), moet 200 ml vloeistof hou wanneer dit vol is.
   Bepaal die waarde van r waarvoor die totale buite-oppervlakte van die glas ’n minimum is. (6)



2. ’n Reghoekige boks word op só ’n manier gemaak dat die lengte (l) van die basis drie keer so lank is as die wydte. Die materiaal wat gebruik word om die bokant en onderkant van die boks te maak, kos R100 per vierkante meter. Die materiaal wat gebruik word om die sye van die boks te maak, kos R50 per vierkante meter. Die boks moet ’n volume hê van 9 m³. Laat die wydte van die boks x meter wees.
   2.1 Bepaal ’n uitdrukking vir die hoogte (h) van die boks in terme van x. (3)
   2.2 Toon aan dat die koste om die boks te maak uitgedruk kan word as
   $C = \frac{1200}{x} + 600x^2$ (3)



   2.3 Bereken die wydte van die boks (dit is die waarde van x) as die koste ’n minimum moet wees. (4)
3. ’n Toeris reis in ’n kar oor ’n bergagtige pas gedurende sy reis. Die hoogte bo seevlak van die kar, ná t minute, word gegee as $s(t) = 5t^3 - 65t^2 + 200t + 100$ meter. Die reis neem 8 minute.
   3.1 Hoe hoog is die kar bo seevlak wanneer dit sy reis oor die bergpas begin? (2)
   3.2 Bereken die kar se tempo van verandering van hoogte bo seevlak met betrekking tot tyd, 4 minute nadat die reis oor die bergpas begin het. (3)
   3.3 Interpreteer jou antwoord op VRAAG 3.2 (2)
   3.4 Hoeveel minute nadat die reis begin het, sal die tempo van verandering van hoogte met betrekking tot tyd ’n minimum wees? (3)

Oplossings

1. Bepaal ’n vergelyking waarvoor jy wil verklein:
   Buite-oppervlakte van glas = oppervlakte van basis + oppervlakte van geboë oppervlak
   Dus $S = \pi r^2 + 2\pi rh$ ✓
   Omdat jy nie die afgeleide kan neem as daar twee verskillende veranderlikes in die vergelyking (r en h) is nie, moet jy ander inligting gebruik om jou te help om die vergelyking te kry waarvoor jy wil verklein in terme van slegs een veranderlike.
   Ons weet die glas hou 200 ml = 200 cm³.
   Die volume van die glas is πr^2h
   Dus $\pi r^2 h = 200$ dus $h = \frac{200}{\pi r^2}$ ✓

En dus kan ons sê

$S = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{200}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{400}{r}$ ✓

Nou is die enigste veranderlike r, want π is 'n konstante.
Skryf S op 'n manier sodat dit maklik is om die afgeleide te bepaal:

$S = \pi r^2 + 400r^{-1}$

Neem die afgeleide van die funksie wat jy wil verklein:

$S' = 2\pi r - 400r^{-2}$ ✓

Stel die afgeleide gelyk aan 0:

$2\pi r - 400r^{-2} = 0$

$2\pi r = 400r^{-2}$

$2\pi r^3 = 400 \qquad r \neq 0$

$r^3 = \frac{400}{2\pi}$ ✓

so $r = \sqrt[3]{\frac{400}{2\pi}} \approx 3.99$ cm ✓ (6)

2.1 Volume = $l \times b \times h$ ✓

$9 = 3x.x.h$

$9 = 3x^2h$ ✓

$h = \frac{3}{x^2}$ ✓ (3)

2.2 $C = [2(3xh) + 2xh] \times 50 + (2 \times 3x^2) \times 100$ $(2(3xh) + 2xh) \times 50 + (2 \times 3x^2) \times 100$ ✓

$= 8x\left(\frac{3}{x^2}\right) \times 50 + 600x^2$ ✓

$= \frac{1200}{x}\ 600x^2$ ✓ (3)

2.3 $C = \frac{1200}{x} + 600x^2 = 1200x^{-1} + 600x^2$ ✓

$\frac{dC}{dx} = -1200x^{-2} + 1200x$ ✓

$0 = -\frac{1200}{x^2} + 1200x$ ✓

$\therefore 1200x^3 = 1200$

$x^3 = 1$

$x = 1$ ✓ (4)

3.1 $s(t) = 5t^3 - 65t^2 + 200t + 100$

$t = 0$ Daarom is dit $5(0)^3 - 65(0)^2 + 200(0) + 100 = 100$ meter ✓✓ (2)

3.2 $s'(0) = 15t^2 - 130t + 200$ ✓

$s'(4) = 15(4)^2 - 130(4) + 200$ ✓

$= -80$ meter per minuut ✓ (3)

3.3 Die hoogte van die kar bo seevlak neem af teen 0 meter per minuut en die kar ry afwaarts, daarom is dit 'n negatiewe koers van verandering. ✓✓ (2)

3.4 $s'(t) = 15t^2 - 130t + 200$

$s''(t) = 30t - 130$ ✓

$30t = 130$ ✓

$\therefore t = \frac{130}{30}$ ✓

$t = 4.3\dot{3}$ (3)

[26]

Wat jy moet kan doen:

- Bepaal die gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kromme
- Differensieer vanaf eerste beginsels
- Differensieer met gebruik van die reëls
- Bepaal die vergelyking van raaklyne
- Gebruik die res- en faktorstelling om faktore van vergelykings in die derdegraad te bepaal
- Los vergelykings in die derdegraad op
- Teken 'n sketsgrafiek van 'n derdegraadsfunksie met die x- en y-afsnitte, draaipunte en/of stasionêre punte
- Bepaal die koördinate van die punt van infleksie
- Bespreek die aard van stasionêre punte insluitend lokale minimum, lokale maksimum en punte van infleksie
- Gebruik differensiasie om 'n vergelyking te vergroot of te verklein

Feb/Maart 2014	Vraag 10, 11 en 12
November 2013	Vraag 8, 9 en 10
Feb/Maart 2012	Vraag 8, 9, 10 en 11
November 2012	Vraag 8, 9 en 10
Feb/Maart 2011	Vraag 9, 10 en 11
November 2011	Vraag 8, 9, 10 en 11
Feb/Maart 2010	Vraag 10, 11 en 12
November 2010	Vraag 8, 9, en 10
Feb/Maart 2009	Vraag 11, 12 en 13
November 2009	Vraag 10, 11, en 12
	Ongebruikte vraestel Vraag 9, 10, en 11
November 2008	Vraag 8, 9, en 10

Eenheid 8

Waarskynlikheid

8.1 Hersiening

Waarskynlikheid is die studie van hoe waarskynlik dit is dat ’n gebeurtenis sal plaasvind. Die volgende vrae is tipiese waarskynlikheidsvrae:

- Wat is die kans dat dit more sal reën?
- As ek ’n Lotto-kaartjie koop, wat is die kans dat ek die Lotto sal wen?

Ons kan ’n **waarskynlikheidskaal** gebruik om te besluit wat die kans is dat ’n gebeurtenis sal plaasvind.

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
Onmoontlik 0%	Geringe kans; onwaarskynlik maar moontlik 25%	Redelike kans	Goeie kans, baie waarskynlik; 75%	Verseker; definitief 100%

NB

- Ons kan die waarskynlikheid uitwerk met die formule:
  $$\text{Waarskynlikheid} = \frac{\text{aantal gunstige uitkomste}}{\text{aantal moontlike uitkomste}}$$
- Hierdie verhouding kan as ’n gewone breuk, ’n desimale breuk of ’n persentasie uitgedruk word.

  Dus, ’n waarskynlikheid van 5 uit 8 kan geskryf word as $\frac{5}{8}$ of as 0,625 of as 62,5%.
- Waarskynlikheid lê altyd **tussen 0 en 1**, gemeet as ’n breuk of ’n desimaal. Indien waarskynlikheid as ’n persentasie gewys word, dan lê dit **tussen 0% en 100%**.

8.2 Teoretiese waarskynlikheid en relatiewe frekwensie

As jy 'n muntstuk opskiet:

- Is die moontlike **uitkomste** K (kop) of M (munt).
- Is daar twee moontlike uitkomste. Elkeen het 'n 50% kans om plaas te vind.
- Sê ons dat daar 'n **teoretiese waarskynlikheid** van $\frac{1}{2}$ is vir elke uitkoms.

Die teoretiese waarskynlikheid om die uitkoms munt (M) te kry, word geskryf as P(M).

$P(H) = \frac{1}{2}$

Relatiewe frekwensie

Probeer hierdie eksperiment:

- Skiet 'n muntstuk 10 keer op. Het dit presies 5 uit die 10 keer op munt geland?

NB

Relatiewe frekwensie word empiriese waarskynlikheid of eksperimentele waarskynlikheid genoem.

Hoewel die <u>**teoretiese waarskynlikheid**</u> om kop te kry $\frac{1}{2}$ is, wys jou eksperiment dit dikwels nie presies nie. Die resultate van jou eksperiment gee vir jou die **relatiewe frekwensie** om kop te kry in daardie bepaalde eksperiment.

bv. 1

- Mantse skiet 'n muntstuk 10 keer op en dit land 7 keer op munt. Dus, vir haar eksperiment is die relatiewe frekwensie van munt $\frac{7}{10}$.
- Jake skiet 'n muntstuk 100 keer op en teken die resultate op. Sy rekord wys dat hy 55 keer kop gekry het. Dus is die relatiewe frekwensie van kop $\frac{55}{100}$. Daarom is die relatiewe frekwensie van munt $\frac{45}{100}$.
- Jake skiet die muntstuk 1 000 keer op. Nou is dit waarskynlik dat kop en munt dieselfde aantal kere sal plaasvind. Dit is waarskynlik dat hy 499 tot 501 keer kop sal kry.
  Die relatiewe frekwensie is gelyk aan of naby aan die teoretiese waarskynlikheid van $\frac{1}{2}$.

NB

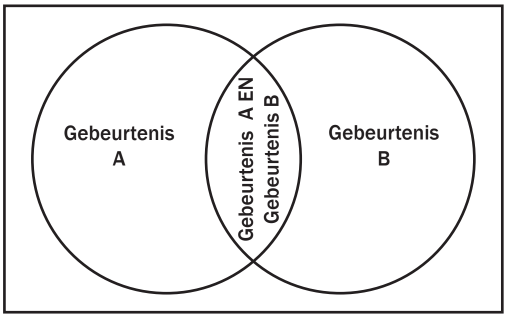
- 'n **GEBEURTENIS** is 'n voorval of 'n aktiwiteit met uitkomste of resultate.
  Byvoorbeeld:
  Om 'n ewe getal te kry is 'n gebeurtenis met gegewe uitkomste.
- 'n **UITKOMS** is die moontlike gevolg van 'n gebeurtenis.
  Byvoorbeeld:
  Die moontlike uitkomste om 'n dobbelsteen te gooi is 1, 2, 3, 4, 5 en 6.
- Die **STEEKPROEFRUIMTE** is die versameling van alle moontlike uitkomste.

8.3 Venn-diagramme

Ons gebruik Venn-diagramme om ons te help om verskillende gebeurtenisse voor te stel. Venn-diagramme bestaan uit sirkels en 'n reghoek.

Die reghoek S verteenwoordig die **steekproefruimte** (al die moontlike uitkomste). Elke sirkel binne S verteenwoordig 'n ander **gebeurtenis.**

As die twee sirkels mekaar sny, wys die snyding watter uitkomste aan albei gebeurtenisse behoort.

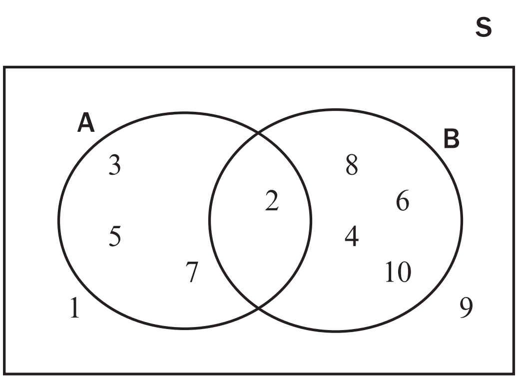


S (steekproefruimte)

bv. 2

1. Teken 'n Venn-diagram om die steekproefruimte aan te toon
S = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}
Dui die volgende gebeurtenisse in die steekproefruimte aan:
Gebeurtenis A is die versameling priemgetalle.
$\therefore$ A = {2; 3; 5; 7}
Gebeurtenis B is die versameling ewe getalle.
$\therefore$ B = {2; 4; 6; 8; 10}

Oplossing



wenk

- Albei versamelings het 'n 2 in, dus moet A en B mekaar sny.
- Skryf 2 in die snyding.
- Skryf dan die oorblywende getalle in elke gebeurtenis neer.
- Kyk of daar enige getalle is wat nie in Gebeurtenis A of Gebeurtenis B is nie.
- 1 en 9 is deel van die steekproefruimte, maar dit is nie in A of in B nie. Skryf dit in die reghoek, maar nie in A of in B nie.

bv. 3

Gebruik die Venn-diagram in die vorige voorbeeld om die volgende te bepaal:

1. P(A)

2. P(B)

3. P(A en B)

4. P(A of B)

Oplossings

1. $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

2. $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

3. $P(A \text{ en } B) = \frac{1}{10}$

4. $P(A \text{ of } B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

NB

- $P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$
  $= \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
- $P(A \text{ of } B) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
  $\therefore$ **P(A of B) = P(A)+P(B) – P(A en B)**

8.4 Onderling uitsluitende gebeurtenisse

Onderling uitsluitende gebeurtenisse is gebeurtenisse wat nie op dieselfde tyd kan plaasvind nie. Daar is geen snyding tussen die gebeurtenisse nie.

- **Onderling:** van toepassing op twee of meer mense of gebeurtenisse.
- **Uitsluit:** om uit te hou, om nie 'n persoon toe te laat nie.
- **Onderling uitsluitend:** Albei gebeurtenisse hou die ander een uit. Daar is dus geen uitkoms wat terselfdertyd in albei gebeurtenisse kan plaasvind nie.

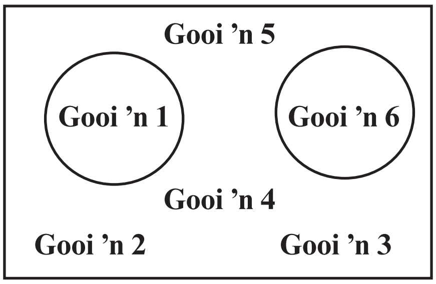
bv. 4

As jy 'n dobbelsteen gooi, is dit onmoontlik dat dit gelyktydig op 'n 1 en 'n 6 sal land. Dus P(1) en P(6) is onderling uitsluitend.
Wanneer jy 'n dobbelsteen gooi, wat is die kanse om 'n 6 of 'n 1 te kry?

Dus $P(1 \text{ of } 6) = P(1) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Dus is die kans om óf 'n 1 óf 'n 6 te kry $\frac{1}{3}$ of 33,3%

S: Moontlike uitkomste wanneer 'n dobbelsteen gegooi word



Wanneer twee gebeurtenisse onderling uitsluitend is, **P(A en B) = 0**

∴P(A of B) = P(A) + P(B) vir onderling uitsluitende gebeurtenisse

Ons kan ook hierdie reël vir die aantal elemente of uitkomste in elke gebeurtenis gebruik, as die gebeurtenisse onderling uitsluitend is:

$$n(A \text{ of } B) = n(A) + n(B)$$

Wanneer twee gebeurtenisse onderling uitsluitend is, dan oorvleuel hulle nie. Daarom is die snyding van A en B leeg en skryf ons $A \cap B = \varnothing$ (leë versameling) en $P(A \cup B) = 0$

wenk

As P(A en B) = 0 of as P(A of B) = P(A) + P(B), dan is die gebeurtenisse onderling uitsluitend.

8.5 Komplementêre gebeurtenisse

wenk

- **Komplement:** (s.nw) iets wat 'n gebeurtenis voltooi; dit voeg by wat ontbreek om die hele te vorm.
- **Komplementêre:** (b.nw) 'n gebeurtenis wat ander gebeurtenisse voltooi of daartoe bydra om die hele steekproefruimte te vorm

Gebeurtenisse wat **onderling uitsluitend is en uit die hele steekproefruimte bestaan**, word **komplementêre gebeurtenisse** genoem. Daar is geen snyding nie en geen elemente van die steekproefversameling is buite die twee versamelings nie.

Die moontlike gebeurtenisse wanneer jy 'n dobbelsteen gooi is 1; 2; 3; 4; 5 of 6.

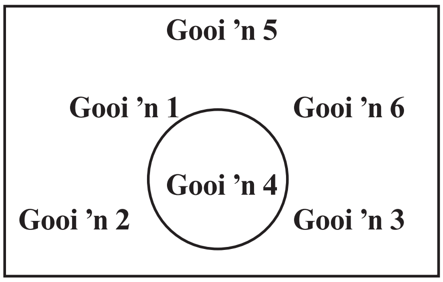
Die waarskynlikheid om 'n 4 te gooi is $\frac{1}{6}$.

Die waarskynlikheid om nie 'n 4 te gooi nie, is $\frac{5}{6}$.

Dus is die gebeurtenis om **nie** 'n 4 te gooi nie, die **komplement** van die gebeurtenis om 'n 4 te gooi.

Dus $P(4) + P(4') = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

S: Moontlike uitkomste wanneer 'n dobbelsteen gegooi word



Die komplementêre reël:
$P(A') + P(A) = 1$ of $P(A') = 1 - P(A)$
$P(A')$ beteken die waarskynlikheid van "nie A nie".

In die voorbeeld, n(nie 'n 4 gooi nie) + n(gooi 'n 4) = 5 + 1 = 6

Aktiwiteit 1

1. As S = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}, A = {1; 3; 5; 7} en B = {2; 4; 6}, wat is die moontlikheid om 'n getal te kies wat nie in versameling A is nie? (2)

2. S = {a; b; c; d; e; f; g; h; i; j} en A = {a; e; i}, B = {b; c; d; f; g; h}, C = {b; h; j}.

a) Teken 'n Venn-diagram om S te verteenwoordig. (4)

b) Gee 'n beskrywing van versameling A. (1)

c) Is daar enige komplementêre versamelings? Verduidelik. (2)

d) Watter versamelings is onderling uitsluitend, maar nie komplementêr nie? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

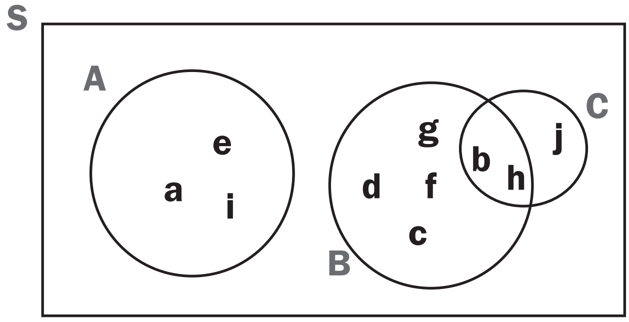
3. 'n DVD-winkel het 180 komedies, 250 dramas, 230 wetenskapfiksie en 120 rillers. As jy 'n DVD willekeurig kies, wat is die waarskynlikheid dat die fliek 'n komedie OF 'n riller is? (3)

[14]

Oplossings

1. $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ ✓✓ (2)

2. **a)**



✓✓✓✓(4)

b) Versameling A is die versameling klinkers van a tot j; of die versameling van die eerste drie klinkers van die alfabet. ✓ (1)

c) Versameling A en B is nie komplementêr nie want hulle sluit nie element j in nie. Versameling A en C is ook nie komplementêr nie. Versameling B en C deel elemente b en h, dus is hulle nie onderling uitsluitend of komplementêr nie. ✓✓ (2)

d) Versameling A en B is onderling uitsluitend, maar hulle is nie komplementêr nie.
Hulle deel nie enige elemente nie, maar hulle bestaan nie uit die hele steekproefruimte nie. Versameling A en D is ook onderling uitsluitend, maar nie komplementêr nie. ✓✓ (2)

3. Geen DVD is 'n komedie sowel as 'n riller nie, so daar is geen oorvleueling in gebeurtenisse nie. Dit is onderling uitsluitend (maar nie komplementêr nie).

Daar is 250 + 230 + 120 = 600 DVD's in die steekproefruimte.

Gebruik P(A of B) = P(A) + P(B).

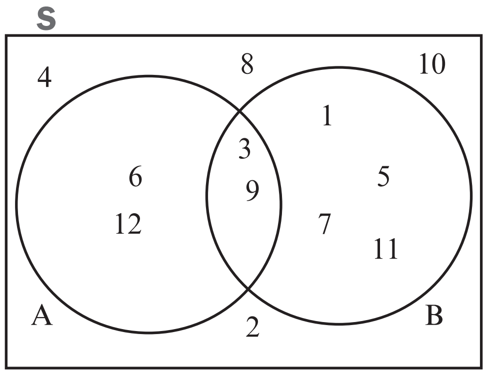
$$\begin{aligned} P(\text{komedie of riller}) &= P(\text{komedie}) + P(\text{riller}) \\ &= \frac{180}{780}\checkmark + \frac{120}{780}\checkmark = \frac{300}{780} = \frac{5}{13}\checkmark \end{aligned}$$ (3)

[14]

8.6 Gebeurtenisse wat nie onderling uitsluitend is nie

Partykeer het twee gebeurtenisse 'n paar uitkomste wat dieselfde is.

bv. 5



Die steekproefruimte S = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12}
In die steekproefruimte is gebeurtenis A die versameling veelvoude van 3
Dus Versameling A = {3; 6; 9; 12}
Gebeurtenis B is die versameling onewe getalle.
Dus B = {1; 3; 5; 7; 9; 11}

$P(A) = \frac{\text{gunstige uitkomste}}{\text{moontlike uitkomste}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Dus $P(A) + P(B) = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} = \frac{10}{12}$

P(A of B) is die kans om die getalle in versameling A of in versameling B te kry.
Ons kan nie die 3 en die 9 vir albei versamelings tel nie. Ons kan nie die getalle in die snyding van versameling A en versameling B herhaal nie.
Dus P(A of B) = $\frac{8}{12}$.
Dus P(A) + P(B) ≠ P(A of B)
Om hulle gelyk te maak, moet ons die waarskynlikheid van die snyding, $P(A \cap B)$ aftrek.
$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12}$ Dit is die antwoord wat ons gekry het vir P(A of B).

> Die OPTEL-reël vir die waarskynlikheid van ENIGE twee gebeurtenisse in 'n steekproefruimte:
>
> **P(A of B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)**

> Ons kan ook hierdie reël gebruik vir die aantal elemente of uitkomste in elke versameling:
>
> **n(A of B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)**

Aktiwiteit 2

In 'n groep van 50 leerders, studeer 35 Wiskunde en 30 studeer Geskiedenis. 12 leerders studeer nie Wiskunde of Geskiedenis nie.

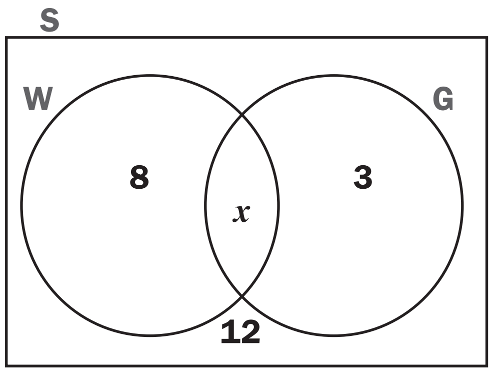
1. Teken 'n Venn-diagram om hierdie inligting voor te stel. (4)

2. As 'n leerder willekeurig uit hierdie groep gekies word, wat is die waarskynlikheid dat hy Wiskunde sowel as Geskiedenis studeer? (2)

[6]

Oplossings

1. Gebruik W vir Wiskunde en G vir Geskiedenis



✓✓✓✓ (4)

- Teken die steekproefruimte en versamelings vir die gebeurtenisse W en G.
- Ons weet nog nie hoeveel leerders (uitkomste) in die snyding van W en G is nie.
  Dus, laat M ∩ H = *x*
- Ons weet dat 12 leerders nie in W of G is nie.

  $35 - x + x + 30 - x + 12 = 50$

  $-x = -27$

  $x = 27$

  Dus, skryf 27 in die snyding van W en G.

  W = 35 – 27 = 8

  G = 30 – 27 = 3.

2. P(W en G) = $\frac{27}{50}$ ✓✓ (2)

[6]

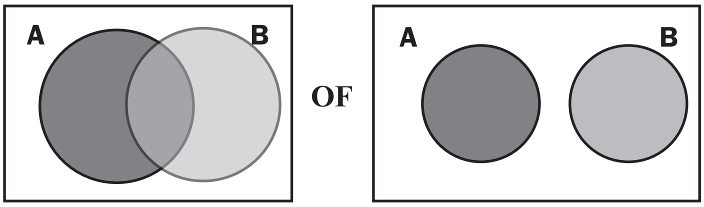
8.7 Opsomming van simbole en versamelings wat in waarskynlikheid gebruik word

Daar is party simbole wat jy moet gebruik wanneer jy waarskynlikheid beskryf. Ons het reeds party daarvan gebruik.

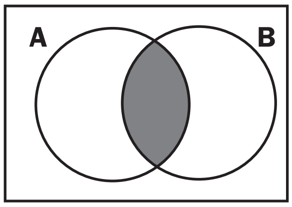
Om die gebruik van elke simbool te verduidelik, gaan ons hierdie versamelings weer gebruik:

S = {a; b; c; d; e; f; g; h; i} en A = {a; e; i}, B = {a; b; c; d; f; g;}, waar S = steekproefruimte, A en B is twee versamelings in die steekproefruimte.

P(A)	(A) beteken die waarskynlikheid dat ’n element van versameling A sal plaasvind. $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
n(A)	n(A) beteken die aantal elemente in versameling A. n(A) = 3
A´	A´ beteken al die elemente van die steekproefruimte wat NIE in versameling A is nie. Dit is die komplement van versameling A.
A´	= {b; c; d; f; g; h}
$\cup$	A $\cup$ B beteken dieselfde as A OF B Dit beteken die **vereniging** van die twee versamelings en verteenwoordig die totaal van al die elemente wat in versameling A of versameling B is. Geen elemente word herhaal nie. A $\cup$ B = {a; b; c; d; e; f; g; i}
$\cap$	A $\cap$ B is dieselfde as A **en** B Dit beteken die **snyding** van versameling A en B en verteenwoordig al die elemente wat hulle deel. (Al die elemente wat gelyktydig in versameling A en B is.) Dit is waar die versamelings oorvleuel. A $\cap$ B = {a}
P(A $\cap$ B)	P(A $\cap$ B) beteken die waarskynlikheid dat ’n element van (A $\cap$ B) sal plaasvind. $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$
P(A $\cup$ B)	P(A $\cup$ B) beteken die waarskynlikheid dat ’n element van (A $\cup$ B) sal plaasvind. $P(A \cup B) = \frac{8}{9}$
n(A $\cup$ B)	n(A $\cup$ B) beteken die aantal elemente in versameling A of versameling B n(A $\cup$ B) = 8
n(A $\cap$ B)	n(A $\cap$ B) beteken die aantal elemente in versameling A en versameling B op dieselfde tyd (die elemente wat hulle deel). n(A $\cap$ B) = 1
(A $\cap$ B)´	(A $\cap$ B)´ beteken al die elemente van die steekproefruimte wat NIE in (A $\cap$ B), is nie, die komplement van A $\cap$ B. (A $\cap$ B)´ = {b; c; d; e; f; g; h; i}
(A $\cup$ B)´	(A $\cup$ B)´ beteken al die elemente van die steekproefruimte wat NIE in (A $\cup$ B) is nie. (A B)´ = {h}



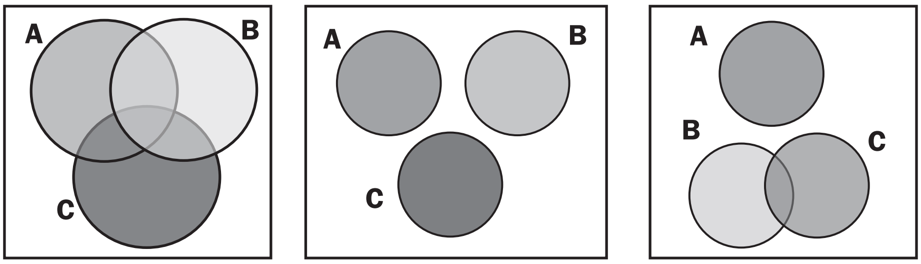
Die geskakeerde dele verteenwoordig:
(A of B) of (A ∪ B)



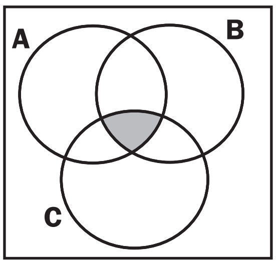
Die geskakeerde deel verteenwoordig:

(A en B) of (A ∩ B)

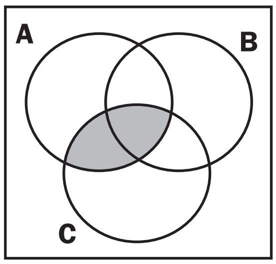
Jy moet ook in staat wees om met hierdie drie versamelings in waarskynlikheid te werk, deur ’n Venn-diagram en die formules te gebruik.



Die geskakeerde dele verteenwoordig:
(A of B of C) of (A ∪ B ∪ C)



Die geskakeerde deel verteenwoordig:
(A en B en C) of (A ∩ B ∩ C)



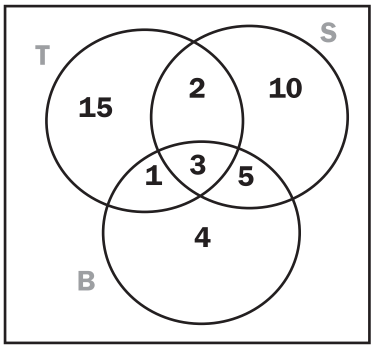
Die geskakeerde deel verteenwoordig:
(A en C) of (A ∩ C)

bv. 6

'n Opname word gedoen met 'n groep van 50 leerders om uit te vind wat die gewildste is by die skoolsnoepie. Hulle word gevra of hulle gewoonlik geroosterde toebroodjies (T), slaai (S) of burgers (B) koop.

Hulle kan geen, een, twee of drie van die maaltye kies.

Die opname se resultate word met hierdie Venn-diagram aangetoon:



a) Hoeveel leerders het nie slaai, geroosterde toebroodjies of burgers gekoop nie?

b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n leerder wat ewekansig uit hierdie opname gekies is:

i) slaai koop, maar nie geroosterde toebroodjies of burgers nie.

ii) geroosterde toebroodjies en slaai koop, maar nie burgers nie.

iii) slaai of burgers of albei koop, maar nie geroosterde toebroodjies nie.

Oplossings

a) $50 - (15 + 2 + 10 + 1 + 3 + 5 + 4) = 50 - 40 = 10$

10 leerders het nie een van die items wat gelys is, gekoop nie.

b) **(i)** $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ **(ii)** $\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$ **(iii)** $\frac{10+5+4}{50} = \frac{19}{50}$

Aktiwiteit 3

’n Skool het ’n kamp vir 103 Graad 12-leerders gehou. Die leerders is gevra watter kos hulle op die kamp wil eet.

Hulle het ’n keuse gehad uit hoender (H), groente (G) en vis (V).

Die volgende inligting is versamel:

- 2 leerders eet nie hoender, groente of vis nie
- 5 leerders eet net groente
- 2 leerders eet net hoender
- 21 leerders eet nie vis nie
- 3 leerders eet net vis
- 66 leerders eet hoender en vis
- 75 leerders eet groente en vis

Laat die aantal leerders wat hoender, groente en vis eet, x wees.

a) Teken ’n Venn-diagram om die inligting voor te stel. (6)

b) Bereken x. (3)

c) Bereken die waarskynlikheid dat ’n leerder die volgende ewekansig kies:

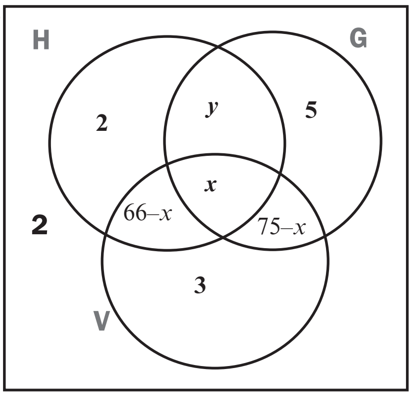
  i) Eet net hoender en vis, en nie groente nie. (2)

  ii) Eet enige TWEE van die gegewe koskeuses: hoender, groente en vis. (2)

[13]

Oplossings

a)



Vul enige gegewe inligting in wat jy kan.

Ons weet nog nie waar hierdie inligting moet kom nie:

– 21 leerders eet nie vis nie

– 66 leerders eet hoender en vis

Laat x dus die leerders wees wat hoender, vis en groente eet.

Dan is $66 - x$ leerders wat net hoender en vis eet.

Stel y in, die leerders wat nie vis eet nie, maar net hoender en groente.

Dan is $2 + y + 5 + 2 = 21$

$\therefore y = 12$ ✓✓✓✓✓✓(6)

b) $2 + 12 + 5 + 66 - x + x + 3 + 75 - x + 2 = 103$ ✓✓

$-x + 165 = 103$

$-x = -62$

$x = 62$ ✓ (3)

c) **(i)** $\frac{66-x}{103} = \frac{4}{103}$ ✓✓ (2)

(ii) $\frac{4+12+13}{103} = \frac{29}{103}$ ✓✓ (2)

[13]

8.8 Boomdiagramme en gebeurlikheidstabelle

1. Onafhanklike gebeurtenisse
   Twee opeenvolgende gebeurtenisse is onafhanklik indien die uitkomste van die een gebeurtenis nie die uitkoms van die ander gebeurtenis beïnvloed nie.

bv. 7

Die waarskynlikheid dat 'n muntstuk opgeskiet word en op kop land, is P(K) = $\frac{1}{2}$.

Wat is die waarskynlikheid dat twee muntstukke opgeskiet word en op kop land?

Oplossing

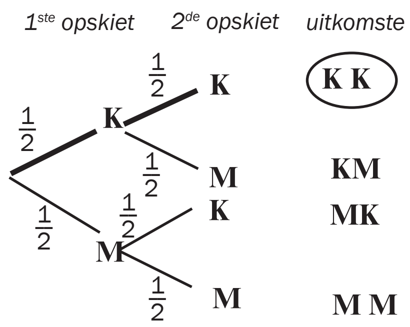
Daar is vier moontlike uitkomste:

K en K; K en M; M en K; M en M.

Dus is **K en K** 1 uit 4 uitkomste en P(K en K) = $\frac{1}{4}$.

'n Boomdiagram is 'n prentjie wat jou help om alle moontlike uitkomste van die gebeurtenisse te lys.

Hier is die boomdiagram vir P(K en K) as jy 'n muntstuk twee keer opskiet:



Die **boomdiagram** wys 4 uitkomste.

Elke keer wat jy die muntstuk opskiet, is die uitkoms (kop of munt) nie afhanklik van die uitkomste van die laaste opskiet nie. Hierdie twee gebeurtenisse is dus **onafhanklik** van mekaar.

bv. 8

Jy het 'n pak kaarte (geen "jokers" nie).

Wat is die waarskynlikheid van hierdie twee gebeurtenisse?

– <u>Gebeurtenis A</u>: Trek 'n hartkaart uit 'n pak kaarte en sit dit terug.
– <u>Gebeurtenis B</u>: Trek weer 'n hartkaart uit die pak kaarte.

A en B is onafhanklike gebeurtenisse. Ongeag watter kaart in Gebeurtenis A getrek word, dit word teruggesit in die pak. Die uitkoms van Gebeurtenis B is dus nie afhanklik van die uitkoms van Gebeurtenis A nie.

Daar is 52 kaarte in 'n pak. Daar is 4 kleure:
harte, skoppens, diamante en klawers

Om 'n kaart te trek, beteken om een uit die pak te kies

Boomdiagram

Hier is die boomdiagram vir alle moontlike uitkomste van die twee gebeurtenisse.

Gebeurtenis A	***Gebeurtenis B***	***Uitkomste vir hart en dan hart***
hart $\frac{13}{52}$	hart $\frac{13}{52}$	$\frac{13}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
	nie 'n hart nie $\frac{39}{52}$	
nie 'n hart nie $\frac{39}{52}$	hart $\frac{13}{52}$	
	nie 'n hart nie $\frac{39}{52}$	

$P(A \text{ en } B) = \frac{1}{16}$

Vergelyk dit met:

$P(A) \times P(B) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\therefore P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$

> Gebeurtenisse is **onafhanklik** as die waarskynlikheid dat een gebeurtenis plaasvind nie beïnvloed word deur 'n ander gebeurtenis wat plaasvind nie. **P(A en B) = P(A) × P(B)……..indien die gebeurtenisse onafhanklik is**

2. Afhanklike gebeurtenisse

Twee opeenvolgende gebeurtenisse is afhanklik as die uitkoms van die een gebeurtenis die uitkoms van die ander gebeurtenis beïnvloed.

bv. 9

Wat is die waarskynlikheid van hierdie twee gebeurtenisse?

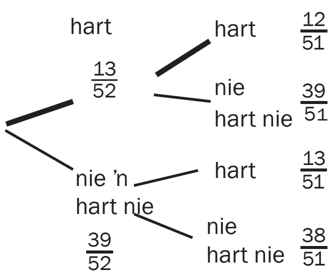
- Gebeurtenis A: Trek 'n hartkaart uit 'n gewone pak kaarte en sit dit nie terug nie.
- Gebeurtenis B: Trek weer 'n hartkaart uit die res van die pak (51 kaarte oor).

Oplossing

A en B is **afhanklike** gebeurtenisse, want Gebeurtenis B is afhanklik van die uitkoms van Gebeurtenis A.

Hier is 'n boomdiagram vir Gebeurtenis A en Gebeurtenis B.

Gebeurtenis A Gebeurtenis B



Uitkoms van hart dan hart

$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = \frac{156}{2\,652} \times \frac{1}{17}$

P(A en B) $= \frac{1}{17}$

Vergelyk dit met:

P(A) $\times$ P(B) $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\therefore$ P(A en B) $\neq$ P(A) $\times$ P (B)

Wanneer die gebeurtenisse afhanklik is.

Gebeurtenisse is **afhanklik** as die waarskynlikheid dat een gebeurtenis plaasvind, 'n invloed het op hoe 'n ander gebeurtenis plaasvind.

P(A en B) $\neq$ P(A) $\times$ P(B)............ vir afhanklike gebeurtenisse

8.9 Gebeurlikheidstabelle

Ons kan ook ’n gebeurlikheidstabel gebruik om alle moontlike uitkomste van gebeurtenisse voor te stel.

Kyk na dieselfde voorbeeld wat ons vir die boomdiagram op bladsy 159 gebruik het:
Wat is die waarskynlikheid van hierdie twee gebeurtenisse?

- Gebeurtenis A: Trek ’n hartkaart uit ’n pak kaarte en **sit dit terug**.
- Gebeurtenis B: Trek weer ’n hartkaart uit die pak kaarte.

Ons kan ’n gebeurlikheidstabel van moontlike uitkomste maak met kolomme vir die soort kaart wat getrek word en rye vir die gebeurtenisse:

	hart	nie hart nie	Totaal
Gebeurtenis A	13	39	52
Gebeurtenis B	13	39	52
Totaal	26	78	104

Getalle in elke **ry** word opgetel en gee die totaal aan die regterkant.
Getalle in elke **kolom** word opgetel en gee die totaal aan die onderkant van die tabel.

bv. 10

Die haarkleur van 50 leerders is opgeteken. Die tabel hieronder stel die inligting voor.

	Meisies	**Seuns**	**Totaal**
Swart	10	12	22
Bruin	8	9	17
Blond	6	5	11
Totaal	24	26	50

Bereken die waarskynlikheid dat ’n leerder wat ewekansig gekies is:

1) bruin hare het
2) blonde hare het
3) swart hare of bruin hare het
4) blonde hare of bruin hare of swart hare het

Oplossings

1) 17 leerders het bruin hare uit ’n totaal van 50 $\therefore P\ (bruin\ hare) = \frac{17}{50}$

2) 11 leerders het blonde hare uit ’n totaal van 50 $\therefore P\ (blonde\ hare) = \frac{11}{50}$

3) 22+17=39 leerders het swart hare of bruin hare uit ’n totaal van 50
$\therefore\ P\ (swart\ of\ bruin\ hare) = \frac{39}{50}$

4) 22+17+11=50 leerders het swart of bruin of blonde hare uit ’n totaal van 50
$\therefore\ P\ (swart\ of\ bruin\ of\ blonde\ hare) = \frac{50}{50} = 1$

Aktiwiteit 4

1. $P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,3$ en $P(A \text{ of } B) = 0,165$.
   Is die gebeurtenisse A en B:
   a) onderling uitsluitend
   b) onafhanklik (7)
2. Wat is die waarskynlikheid om ten minste een ses te gooi uit die vier keer wat 'n dobbelsteen gegooi word? (3)
3. Wat is die waarskynlikheid om vier 6'e agter mekaar te gooi uit die vier keer wat 'n dobbelsteen gegooi word? (3)
4. As twee dobbelstene gelyk gegooi word, wat is die waarskynlikheid dat die som van die twee getalle 9 is? (3)

[16]

Oplossings

1. a) $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$

Gebeurtenisse A en B is onderling uitsluitend as $P(A \text{ en } B) = 0$

$\therefore$ *as gebeurtenisse onderling uitsluitend is, dan* $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$

$P(A \text{ of } B) = 0,165$

$P(A) + P(B) = 0,45 + 0,3 = 0,75$ ✓✓

$\therefore P(A \text{ of } B) \neq P(A) + P(B)$ ✓ (3)

Gebeurtenisse A en B is *nie* onderling uitsluitend nie.

b) Gebeurtenisse A en B is onafhanklik as $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$

Om $P(A \text{ en } B)$ uit te werk, gebruik die reël vir $P(A \text{ of } B)$:

P(A of B) = P(A) + P(B) – P(A en B) vir alle gebeurtenisse A en B

$0,165 = 0,45 + 0,3 - P(A \text{ en } B)$ ✓✓

$\therefore P(A \text{ en } B) = 0,75 - 0,165 = 0,585$ ✓

But $P(A) = 0,45$ en $P(B) = 0,3$ $\therefore P(A) \times P(B) = 0,45 \times 0,3 = 0,135$ ✓

$\therefore P(A \text{ en } B) \neq P(A) \times P(B)$

$\therefore$ Gebeurtenisse A en B is *nie* onafhanklik nie. (4)

2. Die waarskynlikheid dat jy nie 'n ses sal gooi wanneer 'n dobbelsteen 4 keer gegooi word nie, is:

$P(6) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$

$\therefore P((\text{ten minste een } 6) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$ ✓✓✓ (3)

3. Elke keer wat die dobbelsteen gegooi word, is onafhanklik van die vorige keer.

$P(\text{vier 6'e in 'n ry}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{1\,296}$ ✓✓✓ (3)

Oplossings (vervolg)

4. Gebruik 'n tabel:

Laat die kolomme dobbelsteen 1 voorstel en die rye dobbelsteen 2.

		Dobbelsteen 1					
		1	2	3	4	5	6
Dobbelsteen 2	6	1;6	2;6	3;6	4;6	5;6	6;6
	5	1;5	2;5	3;5	4;5	5;5	6;5
	4	1;4	2;4	3;4	4;4	5;4	6;4
	3	1;3	2;3	3;3	4;3	5;3	6;3
	2	1;2	2;2	3;2	4;2	5;2	6;2
	1	1;1	2;1	3;1	4;1	5;1	6;1

Albei dobbelstene word 4 keer gegooi wat getalle met 'n som van 9 gee.

$\therefore$ P(som van 9) $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ ✓✓✓ (3)

[16]

8.10 Telbeginsels

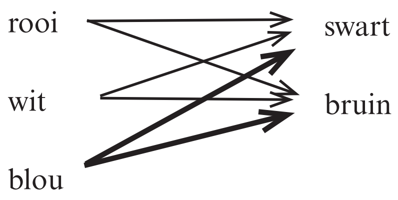
Statistiek het baie toepassings in die alledaagse lewe. Die boomdiagramme en gebeurlikheidstabelle wat tot dusver gebruik is, is nuttig as daar nie te veel uitkomste of moontlikhede is nie. Kyk na hierdie voorbeelde.

bv. 11

1. Hoeveel verskillende uitrustings bestaande uit 'n hemp en 'n broek kan gemaak word met 3 hemde (rooi, wit of blou) en 2 broeke (swart of bruin)?

HEMDE: rooi; wit en blou
BROEKE: swart en bruin

Oplossing



Uitkomste:

rooi/swart	rooi/bruin	wit/swart	
wit/bruin	blou/swart	blou/bruin	∴ **6 verskillende uitrustings** **(3 × 2 = 6)**

2. Hoeveel verskillende maaltye kan jy kry as die spyskaart by 'n restaurant die volgende bied:

Aandete	**Drank**	**Nagereg**
Gebraaide hoender	lemoensap	roomys
Vis en skyfies	Coca-cola	appeltert
Hamburger	koffie	
	tee	

Oplossing

Ons kan $3 \times 4 \times 2 = 24$ gebruik om die aantal verskillende maaltye uit te werk.

Ons het 'n doeltreffender manier nodig om te tel en op hoogte te bly met al die moontlikhede.

1. Telkombinasies (telpermutasies)

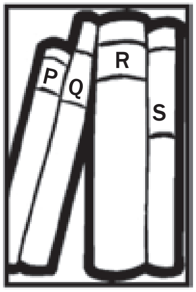
Permutasie

’n Manier om elemente van ’n groep in ’n spesifieke volgorde te rangskik.

a) Die aantal kombinasies (permutasies) van *n* verskillende items

bv. 12

Op hoeveel verskillende maniere kan jy 4 boeke op ’n boekrak rangskik?



Noem dit P, Q, R en S.

Daar is 6 moontlike uitkomste wat met P begin:

P Q R S

P Q S R

P R S Q

P R Q S

P S R Q

P S Q R

Begin nou met Q (6 moontlikhede)

Begin nou met R (6 moontlikhede)

Begin nou met S (6 moontlikhede)

24 verskillende maniere om 4 boeke te rangskik

In plaas daarvan om al die moontlikhede neer te skryf, kan ons die antwoord bepaal deur die faktoriaal (!)-sleutel op ’n sakrekenaar te gebruik.

$$\mathbf{4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24}$$

Gebruik n faktoriaal (n!):
Die uitroepteken ! word die **faktoriaalsimbool** genoem.

4! word gelees as “*vier faktoriaal*” en beteken $4 \times 3 \times 2 \times 1$

7! $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$

b) Kombinasies van uitkomste wat nie almal van mekaar verskil nie (party is dieselfde)

bv. 13 Beskou die woord TAN
Hoeveel letterrangskikkings kan met die woord TAN gemaak word?

Oplossings

Daar is drie letters. Moontlike rangskikkings is:

TAN TNA ANT ATN NTA NAT

3!=3

bv. 14 Beskou die woord PAP

Hoeveel letterrangskikkings kan met die woord PAP gemaak word as die herhalende letters as aparte letters hanteer word?

Hoeveel letterrangskikkings kan met die woord PAP gemaak word as die herhalende letters as dieselfde letter hanteer word?

Oplossings

1. Daar is drie letters. Kom ons skryf die eerste P as P_1 en die tweede P as P_2

P_1AP_2 P_1P_2A AP_1P_2 AP_2P_1 P_2AP_1 P_2P_1A

$\therefore 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

2. As ons die 1 en die 2 weglaat van die letter P, sal ons die volgende kombinasies kry:

PAP PPA APP

Daarom is daar net drie moontlike letterkombinasies uit die woord PAP

$3 = \frac{3!}{2!}$. Die 3! (die teller) dui die totale aantal kombinasies aan wat met drie letters gevorm is en die 2! (die noemer) dui die aantal kere aan wat 'n letter herhaal is.

Aktiwiteit 5

1. Bepaal die aantal kombinasies wat gevorm kan word uit al die letters van die woord **ABRAKADABRA**. (4)

2. Bepaal die aantal kombinasies wat gevorm kan word uit al die letters van die woord **ABRAKADABRA**. Hierdie keer moet die eerste en laaste letter 'n A wees. (4)

3. Bepaal die aantal kombinasies wat gevorm kan word uit al die letters van die woord **ABRAKADABRA**. Hierdie keer moet al die A's langs mekaar wees. (4)

[12]

Oplossings

1. Daar is 11 letters (dus $n = 11$), maar party letters word herhaal.

Daar is 5 A's; 2 B's; 2 R'e; 1 K en 1 D.

Die aantal kombinasies sal $\frac{11!}{5!2!2!1!1!}$ ✓✓✓ = 83 160 wees. ✓ (4)

Op 'n sakrekenaar, gebruik die maalteken tussen faktoriaalfaktore.

2. Die eerste en laaste letters is "vas", so daar is 9 letters wat van posisie kan verander ($n = 9$). Daar is 3 A's; 2 B's; 2R'e; 1 K en 1 D.

Die aantal kombinasies sal $\frac{9!}{3!2!2!1!1!}$ ✓✓✓= 15 120 wees. ✓ (4)

3. Behandel "AAAAA" as een moontlike uitkoms, dus het ons $n = 7$.

Daar is een AAAAA; 2 B's; 2 R'e; 1K en 1 D.

Die aantal kombinasies sal $\frac{7!}{1!2!2!1!1!}$ ✓✓✓= 1 260 wees. ✓ (4)

[12]

C) Die aantal kombinasies van *m* verskillende voorwerpe *n* op 'n keer geneem

bv. 15

Daar is 6 mense in 'n kamer, Noem hulle A, B, C, D, E en F.
Hoeveel verskillende groepe van 2 mense is moontlik?

Oplossing

Die vraag is eintlik – hoeveel kombinasies van 2 mense (A tot F) is moontlik?

Ons kan dit lys:

AB AC AD AE AF (5)	of	BA CA DA EA FA (5)
BC BD BE BF (4)	of	CB DB EB FB (4)
CD CE CF (3)	of	DC EC FC (3)
DE DF (2)	of	EC FD (2)
EF (1)	of	FE (1)

Daar is 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 30 verskillende groepe van 2 mense.

Om die antwoord te bepaal sonder om al die moontlikhede uit te skryf, kan ons die formule gebruik:

Kombinasies: ${}^{m}P_{n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

waar m = totale aantal moontlikhede

n = aantal items in 'n groep

Dus ${}^{6}P_{2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 6 \times 5 = 30$

Gebruik die faktoriaalsleutel op die sakrekenaar, of werk dit uit soos hier gewys word.

D) Die aantal kombinasies van *m* items geneem *n* op 'n keer (waar die items enige hoeveelheid kere herhaal kan word)

bv. 16

In 'n meerkeusevraagtoets is daar 5 vrae, elkeen met 4 meerkeuse-antwoorde. Hoeveel moontlike maniere is daar om die vrae te beantwoord as jy die antwoorde raai?

Oplossing

Aangesien jy uit 4 antwoorde vir elke vraag kan kies, kan jy die antwoorde met 5 "bokse" van 4 oplossings voorstel:

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1\ 024$

bv. 17

Hoeveel driesyfergetalle kan met die syfers 0 – 9 gemaak word as die getalle herhaal mag word?

Oplossing

10 "bokse" van 3 getalle:

$10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1\ 000$

OPSOMMING

Die basiese telbeginsel:

Die aantal maniere om verskeie opeenvolgende besluite te neem (noem dit m_1; m_2 en m_3, ens...) word bepaal deur die aantal keuses wat in elke besluit geneem kan word te vermenigvuldig $m_1 \times m_2 \times m_3 \ldots$

Kombinasies

- Die aantal kombinasies van m verskillende items is $\boldsymbol{m!}$
- Die aantal kombinasies van m verskillende items waarvan:

  a eenders is, b eenders is, c eenders is, is: $\frac{m!}{a! \times b! \times c!}$
- Die aantal kombinasies van m items n op 'n keer geneem, wanneer elkeen van die items enige aantal kere herhaal mag word, is:
  $\boldsymbol{m \times m \times m \times m \times \ldots}$ tot $\boldsymbol{n}$ **faktore** = $\boldsymbol{m^n}$ keer.
- Die aantal maniere wat m items n op 'n keer gerangskik kan word, is

  $^{m}\mathbf{P}_{n} = \frac{\boldsymbol{m!}}{\boldsymbol{(m-n)!}}$

Aktiwiteit 6

1. By Angelo se pizzaplek kan jy kies uit 6 verskillende soorte pasta en 28 verskillende souse. Hoeveel verskillende maaltye van 1 soort pasta en 1 soort sous kan jy eet? (2)
2. Op hoeveel verskillende maniere kan jy 7 boeke op 'n boekrak rangskik? (2)
3. Op hoeveel verskillende maniere kan 9 meisies aan een kant van 'n tafel sit? (2)
4. Op hoeveel verskillende maniere kan 'n drieletterwoord gemaak word uit die letters c; d; e; f sonder om enige letters te herhaal? (3)
5. Hoeveel moontlike keuses kan gemaak word in 'n meerkeusevasvra as daar 4 vrae met 3 antwoorde elk is? (3)
6. Hoeveel verskillende kombinasies kan gemaak word met die letters van LIMPOPO? (4)
7. Hoeveel driesyfergetalle kan met die syfers 1 – 5 gemaak word as:
   a) herhalings toegelaat word (2)
   b) herhalings nie toegelaat word nie (3)
8. 'n Kode word gemaak met die formaat XYY waar X enige letter in die alfabet is en Y enige syfer van 0 tot 9 verteenwoordig.
   a) Hoeveel moontlike kodes kan gevorm word as die letters en syfers herhaal word? (3)
   b) Hoeveel moontlike kodes kan gevorm word as die letters en syfers nie herhaal word nie? (3)

[27]

Oplossings

1. $6 \times 28 =$ **168** verskillende maaltye. ✓✓ (2)
2. $7! =$ **5 040** verskillende maniere waarop 7 boeke op 'n boekrak rangskik kan word. ✓✓ (2)
3. $9! =$ **362 880** verskillende maniere waarop 9 meisies aan een kant van die tafel kan sit. ✓✓ (2)
4. ${}^{4}P_{3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} =$ **24** maniere wat 'n 3-letter-woord van c; d; e; f gemaak kan word sonder herhaling. ✓✓✓ (3)
5. 4 "bokse" van 3 $\therefore$ $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 =$ **81** moontlike keuses. ✓✓✓ (3)
6. LIMPOPO $m = 7$; een L; een I; een M; twee P's; twee O's.
   $\frac{7!}{1! \times 1! \times 1! \times 2! \times 2!}$ ✓✓✓ $= 1\ 260$ ✓ (4)
7. **a)** 5 "bokse" van 3 $= 5^3 =$ **125** driesyfergetalle (herhalings toegelaat) ✓✓ (2)
   b) ${}^{5}P_{3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} =$ **60** driesyfergetalle (herhalings nie toegelaat nie) ✓✓✓ (3)
8. **a)** In die eerste posisie is daar 26 moontlike opsies (26 letters in die alfabet)
   In die tweede posisie is daar 10 moontlike opsies (syfers 0 tot 9)
   In die derde posisie is daar 10 moontlike opsies (syfers 0 tot 10 – die syfers mag herhaal word)
   $\therefore$ $26 \times 10 \times 10 = 2\ 600$ moontlike kodes ✓✓✓ (3)
   b) In die eerste posisie is daar 26 moontlike opsies (26 letters in die alfabet)
   In die tweede posisie is daar 10 moontlike opsies (syfers 0 tot 9)
   In die derde posisie is daar 9 moontlike opsies (die syfers mag nie herhaal word nie)
   $\therefore$ $26 \times 10 \times 9 = 2\ 340$ moontlike kodes ✓✓✓ (3)

[27]

8.11 Gebruik telbeginsels in waarskynlikheid

bv. 18

1. Wat is die waarskynlikheid dat 'n willekeurige rangskikking van die letters van BAFANA met 'n "A" begin en eindig?
2. In 'n laai is 20 koeverte. In 8 van die koeverte is 5 blou en 3 rooi velle papier. In elkeen van die ander 12 koeverte is 6 blou en 2 rooi velle papier. Een koevert word willekeurig gekies. 'n Vel papier word willekeurig daaruit gekies. Wat is die waarskynlikheid dat dit 'n rooi papier is?

Oplossings

1. Daar is 6 letters: een B, 3 A's; een F en een N.

   Totale aantal rangskikkings van BAFANA = $\frac{6!}{1! \times 3! \times 1! \times 1!} = 120$

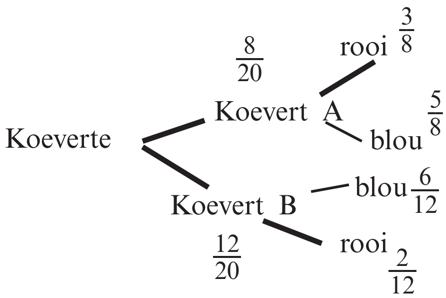
   Woord begin en eindig met A: (A _ _ _ _ A): een B; een A; een F; een N (4 letters in die middel)

   Aantal middelrangskikkings = $\frac{4!}{1! \times 1! \times 1! \times 1!} = 24$

   Waarskynlikheid om met 'n A te begin en te eindig = $\mathbf{\frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 20\%}$

2. Gebruik 'n boomdiagram:

   Rooi word gekies: $\frac{8}{20} \times \frac{3}{8} = \frac{24}{160} = \frac{3}{20}$



   Rooi word gekies: $\frac{12}{20} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{160} = \frac{3}{20}$

   Waarskynlikheid dat 'n rooi papier gekies word = $\frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{6}{20} = 0{,}30 = 30\%$

Wat jy moet kan doen:

- Hersien die optelreël vir onderling uitsluitende gebeurtenisse: P(A of B) = P (A) + P (B)
- Hersien die komplimentêre reël: P(A′) = 1 – P (A)
- Hersien die identiteit P (A of B) = P (A) + P (B) – P(A en B) vir alle moontlike gebeurtenisse.
- Identifiseer afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse en gebruik die produkreël
- Gebruik Venn-diagramme om probleme vir tot drie gebeurtenisse op te los.
- Stel ’n x vir ’n gebeurtenis in om probleme op te los.
- Gebruik boomdiagramme en gebeurlikheidstabelle vir die waarskynlikheid van opeenvolgende gebeurtenisse of gelyktydige gebeurtenisse wat nie noodwendig onafhanklik is nie.
- Verstaan en gebruik telbeginsels in waarskynlikheid.

eksamen

NOV 2013 P3 V3, V4, V6

Feb/Maart 201 P3 V4, V5 en V6

Feb/Maart 2012 P3 V5, V6 en V7

NOV 2011 P3 V3, V5, V6

Feb/Maart 2011 P3 V3, V5, V6

NOV 2010 P3 V1, V5

9 Eenheid

Analitiese meetkunde

Analitiese meetkunde werk met die Cartesiese vlak en met algebra om punte, lyne en vorms te bepaal.

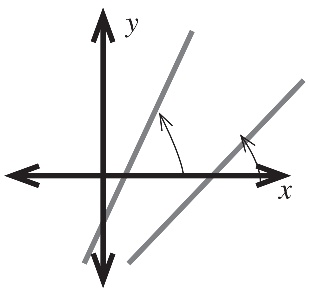
9.1 Hersiening: Analitiese Meetkunde

Hierdie onderwerp word ook Koördinaatmeetkunde genoem.

1. **Gradiënt van 'n lyn**

   Die gradiënt is die helling van 'n reguitlyn. Dit wys hoe steil die lyn is.

   Hoe steiler die gradiënt, hoe groter is die hoek wat dit vorm met die grond of die positiewe sy van die x-as.



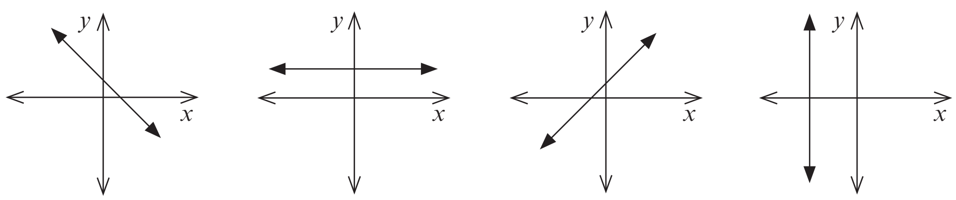
   gradiënt m = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

   OF

   $\frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x}$

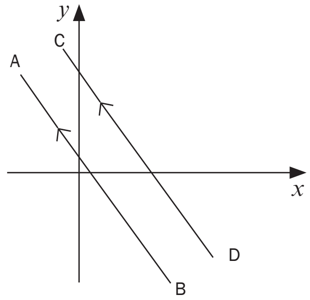
   waar $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ twee punte op die lyn is.

$m < 0$ (negatiewe gradiënt) $m = 0$ $m > 0$ (positiewe gradiënt) m is ongedefinieerd



Ewewydige lyne het gelyke gradiënte.

AB || CD en $m_{AB} = m_{CD}$

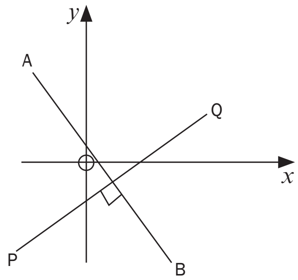


Die produk van die gradiënte van lyne wat **loodreg** is, is –1.

Dit beteken dat die gradiënt van een lyn die negatiewe resiprook van die gradiënt van die tweede lyn is:

AB ⊥ PQ

$m_{AB} \times m_{PQ} = -1$



Nota: Die vergelyking moet altyd in die vorm $y = mx + c$ wees.

bv. 1

1. Die grafieke van $y = 2x + 1$ en $y = 2x + 5$ is **ewewydig** want albei het $m = 2$.

Die grafieke van $y = 2x + 1$ en $y = -\frac{1}{2}x + 5$ is **loodreg** want $2x - \frac{1}{2} = -1$

2. Die afstandformule

Leer die formule vir afstand:

Lengte van AB $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Jy kan ook die koördinate van 'n punt op die lyn met die afstandformule bepaal.

bv. 2

1. L(-5;-2) en M (-1;-6) is twee stelle koördinate op dieselfde reguitlyn. Bepaal die lengte van LM

$LM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$LM = \sqrt{(-5 + 1)^2 + (-2 + 6)^2}$

$= \sqrt{16 + 16}$

$= \sqrt{32}$

$= 4\sqrt{2}$

2. Die lengte van die reguitlyn PQ word gegee as $2\sqrt{5}$. Die koördinate van P (5;2) en Q(3;t) word gegee. Bepaal die waarde(s) van t.

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$2\sqrt{5} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - t)^2}$

$\sqrt{20} = \sqrt{4 + (4 - 4t + t^2)}$ **kwadreer albei kante**

$20 = 8 - 4t + t^2$

$t^2 - 4t - 12 = 0$

$(t - 6)(t + 2) = 0$

$t = 6$ of $t = -2$

Aktiwiteit 1

1. Vir 'n lyn wat deur die twee punte A(6; 6) en B(3; 2), gaan, bereken die lengte van AB. (3)

2. As PQ = 5 eenhede; P (5; t) en Q (1; –3) bepaal die moontlike waarde(s) van *t*. (3)

[6]

Oplossings

1. Lengte AB $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ✓

$= \sqrt{(6-3)^2 + (6-2)^2}$ ✓

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

Die lengte van AB is 5 eenhede. ✓ (3)

2. $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

$5 = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-t)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 9 + 6t + t^2}$

$= \sqrt{16 + 9 + 6t + t^2}$

$= \sqrt{t^2 + 6t + 25}$ ✓

$25 = t^2 + 6t + 25$ **(kwadreer albei kante)**

$0 = t^2 + 6t$ ✓

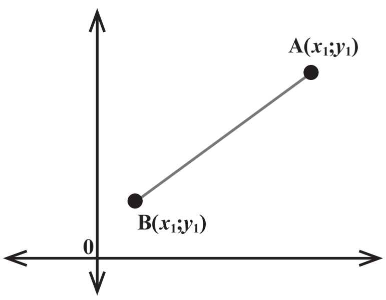
$0 = t(t+6)$ (faktoriseer deur die GGF uit te haal)

$t = 0$ or $t = -6$ ✓ (albei oplossings is korrek – stip die punte om te sien waarom!)

(3)

[6]

3. Die middelpunt van 'n lyn



As jy die koördinate van die twee eindpunte van 'n lyn het, kan jy die punt bepaal wat halfpad tussen dit is. Dit word die **middelpunt** genoem.
Die **middelpunt** van 'n lyn het die koördinate

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

waar $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ die eindpunte van die lyn is.

bv. 3

Vir 'n lyn wat deur die twee punte A(6; 6) en B(3; 2), gaan, bepaal die koördinate van die middelpunt van AB.

Middelpunt van AB $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{6 + 3}{2}; \frac{6 + 2}{2}\right) = \left(4\frac{1}{2};4\right)$

Dus het die middelpunt die koördinate $\left(4\frac{1}{2}; 4\right)$

bv. 4

Die koördinate van die middelpunt van die lyn AB is (1;–4). Bepaal die koördinate van A as die koördinate van B (4;–3) is.

Wanneer die middelpunt gegee is:

x as die middelpunt van AB $= \frac{x_A + x_B}{2}$ en y as die middelpunt van AB $= \frac{y_A + y_B}{2}$

$1 = \frac{x_A + 4}{2}$ en $-4 = \frac{y_A - 3}{2}$

$2 = x_A + 4$ en $-8 = y_A - 3$

$-2 = x_A$ en $-5 = y_A$

Koördinate van A is (–2;–5)

Aktiwiteit 2

K (–1; –6) en L (5; 4) is twee koördinate op dieselfde reguitlyn. Bepaal die koördinate van die middelpunt. (2)

As M (–1; 4) die middelpunt is van die lynstuk en die koördinate van A (3;6) word gegee, bepaal die koördinate van die eindpunt B. (3)

[5]

Oplossings

1. Middelpunt van KL $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-1 + 5}{2}; \frac{-6 + 4}{2}\right)$ ✓

$= (2 ; -1)$ ✓ (2)

2. Laat B die koördinate (x_B; y_B) hê.

$(-1; 4) = \left(\frac{3 + x_B}{2}; \frac{6 + y_B}{2}\right)$ ✓

$-1 = \frac{3 + x_B}{2}$ en $4 = \frac{6 + y_B}{2}$

$(-1)(2) = 3 + x_B$ $(4)(2) = 6 + y_B$

$-2 = 3 + x_B$ $8 = 6 + y_B$

$-5 = x_B$ ✓ $2 = y_B$ ✓

∴ die koördinate van B is (–5; 2).

Ons kan koördinaatmeetkunde gebruik om die eienskappe van meetkundige vorms op die Cartesiese vlak te identifiseer. (3)

[5]

Aktiwiteit 3

A. (–4; 7), B (4; 5), C (0; –1) en D (a; b) is die hoekpunte van parallelogram ABCD.

a) Teken die parallelogram op blokkiespapier. (2)

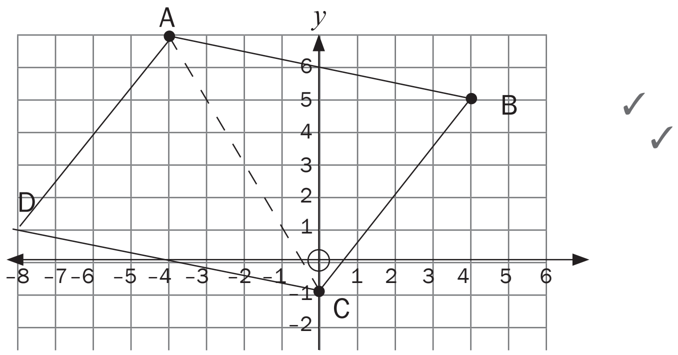
b) Bepaal die middelpunt van die diagonaal AC. (2)

c) Gebruik die inligting wat jy het om die koördinate van punt D te bepaal. (3)

[7]

Oplossings

a)



(2)

b) A (–4; 7) en C (0; –1)

Middelpunt $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4 + 0}{2}; \frac{7 - 1}{2}\right) = (-2; 3)$ ✓ ✓

Dus is die middelpunt van AC (–2; 3) (2)

c) Diagonale van parallelogram ABCD halveer mekaar

$\therefore$ middelpunt van DB is (–2; 3).

Dus middelpunt $(-2; 3) = \left(\frac{4 + a}{2}; \frac{5 + b}{2}\right)$ ✓

$-2 = \frac{4 + a}{2}$ en $3 = \frac{5 + b}{2}$

$-4 = 4 + a$ en $6 = 5 + b$

$-8 = a$ ✓ en $1 = b$ ✓

$\therefore$ Punt D het koördinate (–8; 1) (3)

[7]

9.2 Die vergelyking van 'n lyn

Jy kan die vergelyking van 'n reguitlyn bepaal met $y = mx + c$, as jy weet wat die gradiënt m en die y-afsnit c is.

Jy kan ook die vergelyking van 'n reguitlyn bepaal met $y - y_1 = m(x - x_1)$, as jy weet wat is die gradiënt m en enige punt $(x_1; y_1)$ op die lyn, of as twee punte gegee is.

NOTA: y_1 en x_1 is die koördinate van 'n spesifieke punt op die lyn.

bv. 5

As die gradiënt van 'n lyn –2 is en die lyn sny die y-as by 1, dan is die vergelyking van die lyn $y = -2x + 1$.

bv. 6

As die gradiënt van 'n lyn –2 is en die punt (4; –1) lê op die lyn, bepaal die vergelyking van die lyn $y - y_1 = m(x - x_1)$.

$y - (-1) = -2(x - 4)$	Vervang (4; –1) in die vergelyking
$y + 1 = -2x + 8$	Vereenvoudig
$y = -2x + 7$	Ons gee gewoonlik die antwoord in die vorm $y = mx + c$.

Opsomming

As jy weet	Formule om te gebruik
Die gradiënt en die y-afsnit	$y = mx + c$
Die gradiënt en die koördinate van ten minste een punt op die grafiek	$y - y_1 = m(x - x_1)$ of $y = mx + c$
Twee punte op die lyn: bereken eers die gradiënt en vervang dit dan in $y = mx + c$.	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en $y = mx + c$

Aktiwiteit 4

1. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punte P(1; 2) en Q(3; 8) loop in die vorm $y = ...$ (3)
2. Lyn AB is loodreg op CD, wat 'n gradiënt het van –2. Die punt (3; 4) lê op AB. Bepaal die vergelyking van lyn AB. (2)

[5]

Oplossings

1. Bereken eers die gradiënt van PQ:

   $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$ ✓

   Gebruik dan die vorm $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

   $y - y_1 = 3(x - x_1)$ ✓

   Vervang P(1; 2)

   $y - 2 = 3\,(x - 1)$

   $y - 2 = 3x - 3$

   $\therefore$ Die vergelyking van PQ is $y = 3x - 1$. ✓ (3)

2. $m_{CD} = -2$ en CD $\perp$AB.

   $\therefore\ m_{AB} = \frac{1}{2}$

   Dus het ons nou $y = \frac{1}{2}x + c$

   Vervang (3; 4) om die waarde van c te bepaal.

   $4 = \frac{1}{2}(3) + c$ ✓

   $c = 4 - 1\frac{1}{2}$

   $\therefore\ c = 2\frac{1}{2}$

$\therefore$ vergelyking van lyn AB is $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$ ✓ (2)

[5]

9.3 Die inklinasie van 'n lyn

In trigonometrie het jy die verhoudings tan θ, sin θ en cos θ gebruik.

Om die inklinasie van 'n lyn te bepaal, of die hoek wat dit met die x-as maak, gebruik ons tan θ.

In driehoek ABC, tan θ = $\frac{\text{teenoorst.}}{\text{aangr.}} = \frac{\text{BC}}{\text{AC}}$.

$\frac{\text{BC}}{\text{AC}}$ is ook $\frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x}$ wat die gradiënt is van AB.

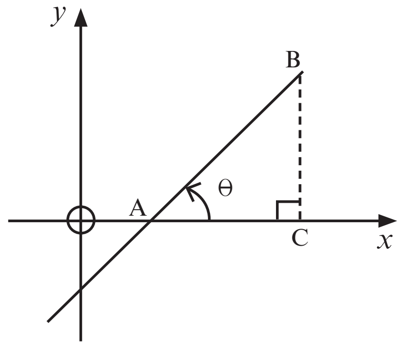
Ons skryf gradiënt van AB as m_{AB}.

Dus kan ons sê dat $m_{\text{AB}} = \tan\theta$

Hoek θ toon die helling of **inklinasie** van die lyn AB.

θ word die **hoek van inklinasie** genoem.

NOTA: $\theta \in (0^{\circ};180^{\circ})$



bv. 7

As $\tan\theta = \frac{1}{2}$, dan θ = 26,56505 …° (Druk: *shift tan* $\frac{1}{2}$ op jou sakrekenaar)

θ = 26,57 (afgerond tot twee desimale plekke)

Aktiwiteit 5

Gee jou antwoorde korrek tot twee desimale plekke.

1. Lyn AB is loodreg op CD wat 'n gradiënt het van –4. Bepaal die inklinasie θ van AB. (2)

2. Bepaal die inklinasie van die reguitlyn wat deur die punte P (–6; 2) en Q (3; 10) gaan. (2)

3. Gegee die punte A (–2; –1), B (5; 6) en C (7; –2), bereken die grootte van $\mathbf{A\hat{B}C}$. (6)

[10]

Oplossings

1. $m_{CD} = -4$ en $m_{AB} \perp m_{CD}$, $-4 \times \frac{1}{4} = -1$

Dus $m_{AB} = \frac{1}{4}$ ✓

Dus $\tan\theta = \frac{1}{4} = 0{,}25$ en $\theta = 14{,}04°$ ✓. (2)

2. P (–6; 2) en Q (3; 10)

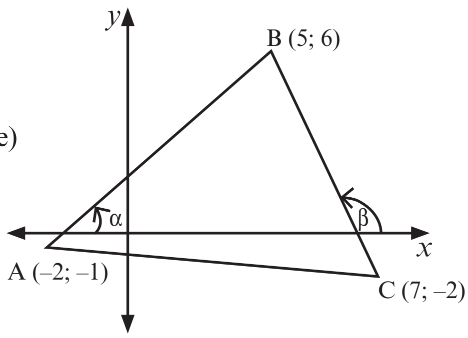
Dus $m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 2}{3 - (-6)} = \frac{8}{9}$ ✓ ✓

Dus $\tan\theta = \frac{8}{9}$ [Om θ, te bepaal, gebruik *8 ÷ 9 = shift tan* op jou sakrekenaar]

Hoek van inklinasie: $\theta = 41{,}63°$

NOTA: (rond af tot 2 desimale plekke) (2)

3. Teken eers 'n rowwe skets. Teken die driehoek op die Cartesiese vlak. Gebruik hoeke α en β



$m_{AB} = \tan\alpha$.

$\therefore \tan\alpha = \frac{6+1}{5+2} = \frac{7}{7} = 1$ ✓

$\therefore \alpha = 45°$ ✓ (spesiale hoeke)

$m_{BC} = \tan$ ✓

$\therefore \tan\beta = \frac{-2-6}{7-5} = \frac{-8}{2} = -4$ ✓

$\therefore \beta = -75{,}963°\ldots + 180°$

$= 104{,}04°$ ✓

$A\hat{B}C = \beta - \alpha$ (buite hoek van Δ)

$= 104{,}04° - 45° = 59{,}04°$ ✓ (6)

[10]

Aktiwiteit 6

1. Vir 'n lyn wat deur die punte A(6; 6) en B(3; 2) gaan:

1.1 Bereken die lengte van AB.

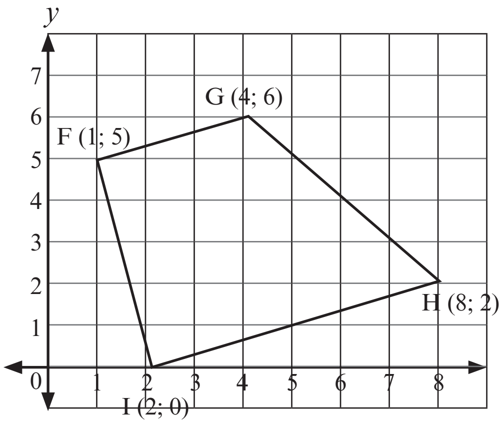
1.2 Bepaal die koördinate van die middelpunt van AB.

1.3 Bereken die hoek van inklinasie van die lyn.

1.4 Bepaal die vergelyking van die lyn deur A en B.

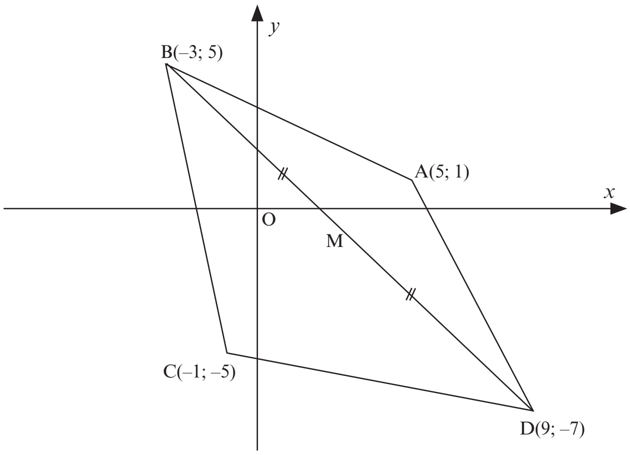
1.5 Bepaal die vergelyking van 'n lyn GH loodreg op AB deur die middelpunt van AB. (11)

2. F, G, H en I is die hoekpunte van die vierhoek wat hieronder gewys word: Watter soort vierhoek is FGHI?



(5)

3. ABCD is 'n vierhoek met hoekpunte A(5 ; 1), B(−3 ; 5), C(−1 ; −5) en D(9 ; −7).



3.1 Bereken die gradiënt van AC. (2)

3.2 Bepaal die vergelyking van AC in die vorm $y = \ldots$ (3)

3.3 Wys derhalwe dat die middelpunt M van BD op AC lê. (3)

3.4 Toon aan dat $A\hat{M}B = 90°$. (2)

3.5 Bereken die oppervlakte van Δ ABC. (5)

[31]

Oplossings

1. 1.1 Lengte AB $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-3)^2 + (6-2)^2}$ ✓

$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ eenhede

1.2 Middelpuntkoördinate:

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+6}{2} = 4\frac{1}{2}$ ✓

$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6+2}{2} = 4.$ Dus het die middelpunt die koördinate $(4\frac{1}{2}; 4)$

1.3 $\tan\theta = m_{AB} = \frac{2-6}{3-6} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ ✓ $\therefore \theta = 53{,}13°$ ✓

1.4 $m_{AB} = \frac{4}{3}$ en jy weet wat die koördinate van A en B is.

Gebruik $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - y_1 = \frac{4}{3}(x - x_1)$ vervang nou óf punt A óf punt B ✓

$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 3)$ hier is punt B vervang vir $(x_1; y_1)$ ✓

$y - 2 = \frac{4}{3}x - 4 \quad \therefore y = \frac{4}{3}x - 2$ ✓

1.5 AB⊥ GH $\therefore m_{AB} \times m_{GH} = -1$ ✓ $\therefore m_{AB} = \frac{4}{3}$ so $m_{GH} = -\frac{3}{4}$ ✓

Die middelpunt van AB is $(4\frac{1}{2}; 4)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - \frac{9}{2})$ ✓

$y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{27}{8}$

$y = -\frac{3}{4}x + 3\frac{3}{8} + 4$

$y = -\frac{3}{4}x + 7\frac{3}{8}$ ✓ (11)

2.

$m_{FG} = \frac{6-5}{4-1} = \frac{1}{3}$ ✓ $m_{HI} = \frac{2-0}{8-2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ✓

$\therefore$ FG en HI is ewewydig.

$m_{FI} = \frac{0-5}{4-1} = \frac{-5}{-1} = 5$ ✓ en $m_{GH} = \frac{2-6}{8-4} = \frac{-4}{4} = -1$ ✓

Dus is FI nie ewewydig aan GH nie.

$\therefore$ FGHI is 'n trapesium (een paar teenoorst. sye||) ✓ (5)

3.

3.1 $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ ✓ vervanging ✓ antwoord

$= \frac{-5-1}{-1-5}$ (2)

$= \frac{-6}{-6}$ Slegs antwoord: volpunte

$= 1$

3.2 ✓✓ vervanging

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 1(x - 5)$

$y = x - 4$ ✓ vergelyking

(3)

3.3 Middelpunt van BD $= \left(\frac{x_2 + x_1}{2}; \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$

$= \left(\frac{-3+9}{2}; \frac{5-7}{2}\right)$

$= (3; -1)$ ✓ middelpunt (3;-1)

lyn AC is $y = x - 4$

$y = 3 - 4$

$y = -1$ ✓ vervanging van M in die vergelyking van lyn AC

$\therefore$ *M lê op AC.*

✓ gevolgtrekking (3)

3.4

$M_{\text{AM}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ✓ gradiënt van AM

$= \frac{-1-5}{3+3}$

$= -1$

en $M_{\text{MB}} = \frac{-1-1}{3-5}$ ✓ gradiënt van BM

$= 1$

$M_{\text{AM}} \times M_{\text{MB}} = -1$

$M_{\text{AM}} \times M_{\text{MB}} = -1$

$\therefore$ A$\hat{\text{M}}$B = 90°. (2)

3.5 $BM = \sqrt{(5+1)^2 + (-3-3)^2}$ ✓ vervang in afstandformule

$BM = \sqrt{72}$

$AC = \sqrt{(5+1)^2 + (1+5)^2}$ ✓ $BM = \sqrt{72}$

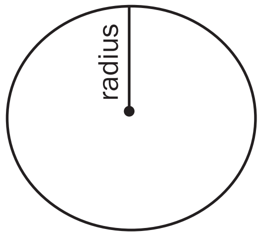
$AC = \sqrt{72}$ ✓ $AC = \sqrt{72}$

Oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2}(\sqrt{72})(\sqrt{72})$ ✓ formule vir oppervlakte van Δ

= 36 vierkante eenhede ✓ antwoord (5)

[31]

9.4 Sirkels in analitiese meetkunde



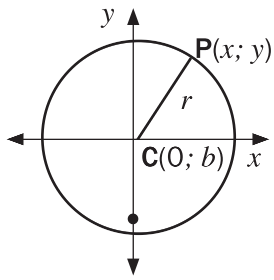
'n **Sirkel** bestaan uit 'n versameling punte wat ewe ver van sy middelpunt af is.

Die **omtrek** is die afstand rondom die hele sirkel.

Die afstand vanaf die middelpunt tot by enige punt op die omtrek van die sirkel word die **radius** van die sirkel genoem.

9.4.1 Die vergelyking van 'n sirkel

SIRKEL MET MIDDELPUNT BY DIE OORSPRONG



Ons kan die afstandformule gebruik om die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt (0; 0) te bepaal.

As P(x; y) enige punt op die sirkel is, met radius r, dan

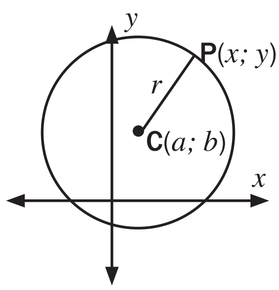
$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

bv. 8

Bepaal die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt 0 en die punt P(5; 2) op sy omtrek.

$x^2 + y^2 = r^2$	Hierdie is die algemene vergelyking. Ons het net die waarde vir r^2 nodig.
$(5)^2 + (2)^2 = r^2$	By die punt (5; 2)
$r^2 = 25 + 4 = 29$	
$\therefore x^2 + y^2 = 29$	

SIRKELS WAARVAN DIE MIDDELPUNT NIE BY DIE OORSPRONG IS NIE



As ons die middelpunt van die sirkel na enige punt op die Cartesiese vlak C(a; b) skuif,

dan $\quad \boldsymbol{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$

en $\quad \boldsymbol{r} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Nota: Hersien die voltooiing van die vierkant in Eenheid 2

bv. 9

Die vergelyking van die sirkel is $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Bepaal die koördinate van die middel en die lengte van die radius.

Die vergelyking is reeds in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,
met $a = -1$, $b = 3$ en $r^2 = 16$

Dus is die middelpunt $(-1; 3)$ en die radius is $\sqrt{16} = 4$.

Onthou dat die radius net 'n positiewe getal kan wees want dit is 'n lengte.

Aktiwiteit 7

1. Bepaal die koördinate van die middelpunt en die lengte van die radius as 'n sirkel die vergelyking $x^2 - 2x + y^2 + 10y = -14$ het. (3)

2. Bepaal die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $C(-1; -2)$ en wat deur die punt $B(1; -6)$ gaan. (3)

[6]

Oplossings

1. Om die vergelyking in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, te kry, moet ons getalle bytel om die vierkant te voltooi deur x^2 met $-2x$ en y^2 met $10y$ te gebruik.

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 10y) = -14$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 10y + 25) = -14 + 1 + 25$ ✓

$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 12$ ✓

Dus is die middelpunt die punt $(1; -5)$ en die radius is $\sqrt{12} = \sqrt{2^2.3} = 2\sqrt{3}$ ✓ (3)

2. Bepaal eers die waarde van r^2:

$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$

$r^2 = (x + 1)^2 + (y + 2)^2$ ✓

Vervang $B(1; -6)$

$r^2 = (1 + 1)^2 + (-6 + 2)^2$ ✓

$r^2 = (2)^2 + (-4)^2$

$r^2 = 4 + 16 = 20$

$\therefore 20 = (x + 1)^2 + (y + 2)^2$ ✓ (3)

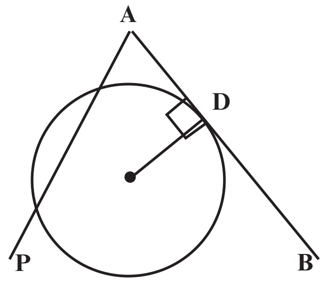
[6]

9.4.2 Die vergelyking van 'n raaklyn aan die sirkel

'n **Raaklyn** is 'n reguitlyn wat 'n sirkel slegs by een punt sny.

Dus is ADB 'n raaklyn, maar AP is nie 'n raaklyn nie.

'n Raaklyn aan 'n sirkel by enige punt op die omtrek is loodreg op die radius by daardie punt. Dus AB $\perp$ CD.



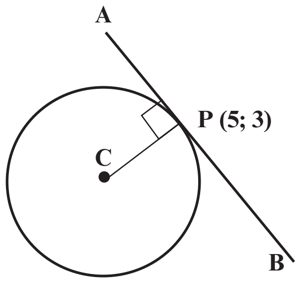
Ons kan al die formules wat ons uit analitiese meetkunde ken, gebruik om probleme op te los met 'n raaklyn aan 'n sirkel (afstand, middelpunt, gradiënt, hoek van inklinasie, die vergelyking van 'n lyn aan die vergelyking van 'n sirkel).

bv. 10

Bepaal die vergelyking van die raaklyn APB wat 'n sirkel met middelpunt C met vergelyking $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 20$ by P(5; 3) raak.

Oplossing

Teken 'n skets om jou te help.



Middelpunt van sirkel is C(3; –1) dus die gradiënt van die radius CP (m_{CP})

is $\frac{3-(-1)}{5-3} = 2$.

radius $\perp$ raaklyn, dus $m_{APB} \times m_{CP} = -1$ en dus

$m_{APB} = -\frac{1}{2}$

Vergelyking van raaklyn: $y - y_1 = m(x - x_1)$

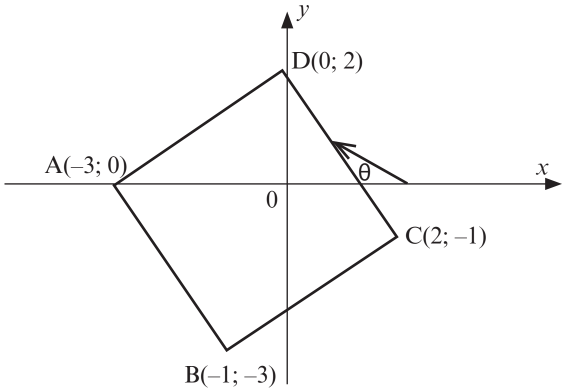
$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-5)$ P is 'n punt op die raaklyn

$y - 3 = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$

Aktiwiteit 8

1. ABCD is 'n vierhoek met hoekpunte A(–3; 0), B(–1; –3), C(2; –1) en D(0; 2).



1.1 Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van AC. (2)
1.2 Toon aan dat AC en BD mekaar halveer. (3)
1.3 Bewys dat $A\hat{D}C = 90°$. (4)
1.4 Toon aan dat ABCD 'n vierkant is. (4)
1.5 Bepaal die grootte van θ, die hoek van inklinasie van DC, korrek tot EEN desimale plek. (3)
1.6 Lê C binne of buite die sirkel met middelpunt (0; 0) en radius 2? Staaf jou antwoord. (2)

[18]

Oplossings

1.1 Middelpunt M van AC: $\frac{2-3}{2}; \frac{-1+0}{2} = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ ✓✓ (2)

1.2 Middelpunt M van BD: $\left(\frac{-1+0}{2}; \frac{-3+2}{2}\right) = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ ✓✓

∴ Die middelpunt van AC en die middelpunt van BD is dieselfde punt, so hulle halveer mekaar. ✓ (3)

1.3 $m_{AD} = \frac{2-0}{0-(-3)} = \frac{2}{3}$ ✓ en $m_{DC} = \frac{-1-2}{2-0} = \frac{-3}{2}$ ✓

$m_{AD} \times m_{DC} = \frac{2}{3} \times \frac{-3}{2} = -1$ ✓

$\therefore AD \perp DC$

$\therefore A\hat{D}C = 90°$ ✓ (4)

1.4

wenk

Daar is verskeie maniere om te bewys dat ABCD 'n vierkant is:
- Bewys dat diagonale gelyk is en mekaar teen 90° halveer
- Bewys dat ABCD 'n reghoek is en 'n paar aangrensende sye gelyk is.
- Bewys dat al vier sye gelyk is en dat een binnehoek 90°is.

Hier is een moontlike antwoord:

Die diagonale AC en BD halveer mekaar (bewys in 1.2)

$A\hat{D}C = 90°$ (bewys in 1.3) ✓

$AD^2 = (2-0)^2 + (0-(-3))^2 = 4 + 9 = 13$ ✓

AD = $\sqrt{13}$

CD^2 = (– 1 – 2)^2 + (2 – 0)^2 = 9 + 4 = 13 ✓

CD = $\sqrt{13}$

Dus aangrensende sye is ewe lank ✓

∴ ABCD is 'n vierkant. (4)

1.5 $\tan\theta = m_{DC} = \frac{-1-2}{2-0} = -\frac{3}{2}$ ✓

θ = –56,3099324... + 180° ✓

θ = 123,7° ✓ (3)

1.6 OC^2 = (2 – 0)^2 + (– 1 – 0)^2

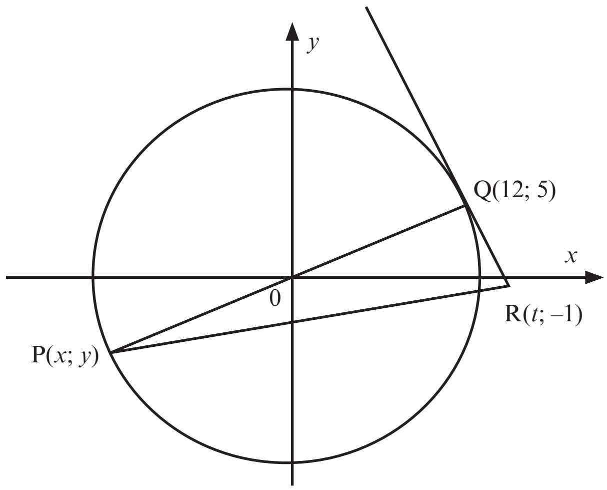
OC^2 = 4 + 1 = 5 ✓

OC = $\sqrt{5}$

Dit is langer as die radius van 2 van die gegewe sirkel, dus lê C buite die sirkel. ✓ (2)

[18]

2. O is die middelpunt van die sirkel in die figuur hieronder. P(x; y) en Q(12; 5) is twee punte op die sirkel. POQ is 'n reguitlyn. Die punt R(t; –1) lê op die raaklyn aan die sirkel by Q.



2.1 Bepaal die vergelyking van die sirkel. (3)

2.2 Bepaal die vergelyking van die reguitlyn deur P en Q. (2)

2.3 Bepaal x en y, die koördinate van P. (4)

2.4 Toon aan dat die gradiënt van QR gelyk is aan $-\frac{12}{5}$. (2)

2.5 Bepaal die vergelyking van die raaklyn QR in die vorm $y = \ldots$ (3)

2.6 Bereken die waarde van t. (2)

2.7 Bepaal 'n vergelyking van die sirkel met middelpunt Q(12; 5) wat deur die oorsprong gaan. (3)

[19]

Oplossings

Die middelpunt is by die oorsprong $x^2 + y^2 = r^2$.

2.1 $OQ^2 = (5)^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169$ ✓✓

Dus is die vergelyking van die sirkel $x^2 + y^2 = 169$ ✓ (3)

2.2 $m_{PQ} = m_{OQ} = \frac{0-5}{0-12} = \frac{5}{12}$ ✓

PQ het y-afsnit van 0. ✓ (2)

$y = \frac{5}{12}x$

2.3 Volgens simmetrie is P die punt (–12; –5). ✓✓ OF

Vervang $y = \frac{5}{12}x$ in $x^2 + y^2 = 169$

$x^2 + \left(\frac{5}{12}x\right)^2 = 169$

$x^2 + \frac{25}{144}x^2 = 169$

$144x^2 + 25x^2 = 169 \times 144$

$169x^2 = 24\ 336$

$x^2 = 144$

$x = 12$ of $x = -12$ $x = -12$ volgens die gegewe diagram ✓

$y = \frac{5}{12}x = \frac{5}{12} \times (-12) = -5$ ✓ (4)

Dus P is die punt (–12; –5).

2.4 raaklyn $\perp$ radius dus QR $\perp$ PQ ✓

$m_{PQ} = \frac{0-5}{0-12} = \frac{5}{12}$

$\therefore m_{QR} = \frac{-12}{5}$ ✓ (2)

2.5 $y = \frac{-12}{5}x + c$ ✓ OF $y - y_1 = \frac{-12}{5}(x - x_1)$ ✓

Vervang Q(12; 5) in die vergelyking om c te bepaal:

$5 = \frac{-12}{5}(12) + c$ ✓	$y - 5 = \frac{-12}{5}(x - 12)$ ✓
$5 + \frac{144}{5} = c$	$y = \frac{-12}{5}x + \frac{144}{5} + 5$
$c = \frac{169}{5}$ ✓	$y = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5}$ ✓
$y = \frac{-12}{5}x + \frac{169}{5}$	

(3)

2.6 R(t; –1) lê op die lyn met vergelyking $y = \frac{-12}{5}x + \frac{169}{5}$

$\therefore -1 = \frac{-12}{5}t + \frac{169}{5}$ ✓

$-5 = -12t + 169$

$12t = 174$

$t = 14{,}5$ ✓ (2)

2.7 $OQ^2 = (x - 12)^2 + (y - 5)^2$ ✓ ✓ Q(12; 5) is die middelpunt van die sirkel

Vervang (0; 0) in die vergelyking:

$OQ^2 = (0 - 12)^2 + (0 - 5)^2$

$OQ^2 = 144 + 25 = 169$ ✓

$\therefore (x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$ (3)

[19]

Wat jy moet kan doen:

Van Graad 10 en 11:

- Bepaal die afstand tussen enige twee punte op die Cartesiese vlak met die afstandformule:
- Afstand = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Bepaal die middelpunt tussen twee punte op 'n lyn met die formule $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.
- Bepaal die gradiënt van die lyn met $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Bepaal die vergelyking van 'n lyn gegewe:
    - Die gradiënt en die y-afsnit met $y = mx + c$
    - Die gradiënt en die koördinate van ten minste een punt op die grafiek
    - Jy kan $y - y_1 = m(x - x_1)$ gebruik
    - Twee punte op die lyn: bereken eers die gradiënt, vervang dan een van die punte in $y = mx + c$.
- Bepaal die inklinasie θ van 'n lyn, waar $m = \tan \theta$.
- Bepaal ander hoeke met meetkunde.

Van Graad 12:

- Bepaal die vergelyking van 'n sirkel met radius r en middelpunt $(a; b)$.
- Bepaal die vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkelmiddelpunt $(a; b)$
- Ken die eienskappe van driehoeke (gelykbenig, gelyksydig, ongelykbenig, reghoekige driehoek); vierkant, reghoek, trapesium, rombus en parallelogram.

Eenheid 10

Trigonometrie

10.1 Hersiening: Trig verhoudings

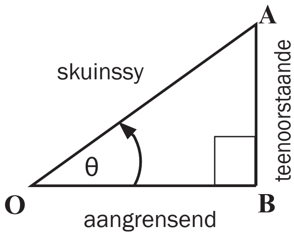
Trigonometrie is die studie van die verwantskap tussen die sye en hoeke van driehoeke.

Die woord trigonometrie beteken "meting van driehoeke".

Die trigonometrie verhoudings

Gebruik θ as die verwysingshoek in ΔABO

- Die sy teenoor die 90° is die skuinssy, daarom is AO die skuinssy.
- Die sy teenoor θ is die teenoorstaande sy, daarom is AB die teenoorstaande sy.
- Die sy aangrensend aan θ word die aangrensende sy genoem, daarom is OB die aangrensende sy.



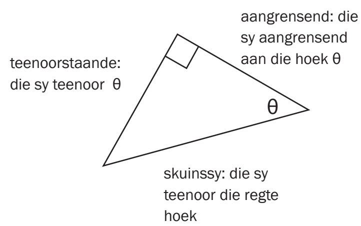
Ons werk met die verhouding van die sye van die driehoek:

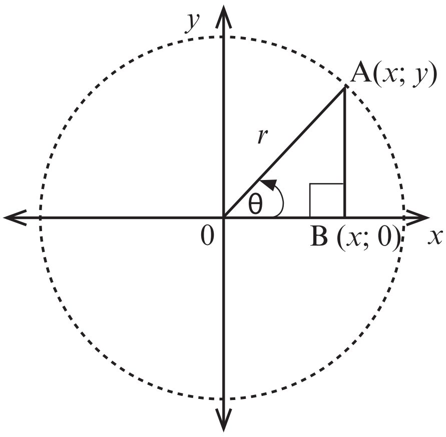
- Die verhouding $\frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}$ word die sinus θ (afgekort na sin **θ**) genoem.
- Die verhouding $\frac{\text{aangrensende}}{\text{skuinssy}}$ word kosinus θ (afgekort na cos **θ**) genoem.
- Die verhouding $\frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}$ word tangens θ (afgekort na tan **θ**) genoem.

Daarom $\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} = AB/AO$

$\cos\theta = \frac{\text{aangrensende}}{\text{skuinssy}} = OB/AO$

$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}\ AB/OB$





Ons kan dieselfde driehoek in standaardposisie op die Cartesiese vlak plaas, met 'n hoekpunt by die oorsprong en een sy op die x-as as volg:

- Op die Cartesiese vlak, is A die punt $(x; y)$.
- Die hoek $A\hat{O}B$ of θ is positief (ons roteer antikloksgewys)
- Die lengte van OB is x-eenhede en die lengte van AB is y-eenhede.
- Ons kan die lengte van AO met die Stelling van Pythagoras bepaal.

In ΔABO, $AO^2 = AB^2 + OB^2$

$AO^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = x^2 + y^2$

wenk

NOTA:

Kyk na die sirkelmiddelpunt O. AO is ook 'n **radius** van hierdie sirkel.

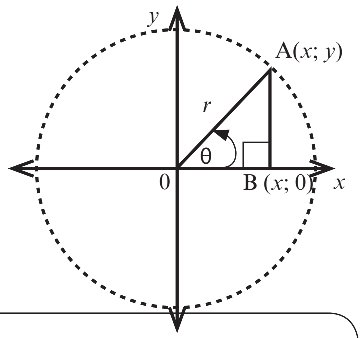
NB

Die Stelling van Pythagoras

In enige reghoekige driehoek is die kwadraat van die skuinssy gelyk aan die som van die kwadrate van die ander twee sye.

Nou kan ons die trigonometriese verhoudings in terme van x, y en r benoem.

- Die verhouding $\frac{y}{r}$ word **sin** θ genoem.
- Die verhouding $\frac{x}{r}$ word **cos** θ genoem.
- Die verhouding $\frac{y}{x}$ word **tan** θ genoem.



NB

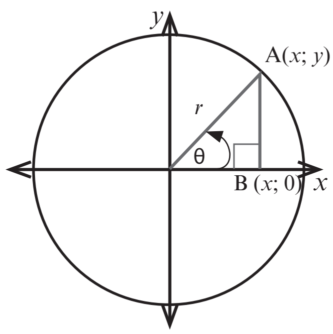
Leer hierdie verhoudings

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aangrensend}}$

wenk

Onthou die afkorting STSCASTTA:

<u>S T S</u>	<u>C A S</u>	<u>T T A</u>
sin $\theta = \frac{T}{S}$	cos $\theta = \frac{A}{S}$	tan $\theta = \frac{T}{A}$



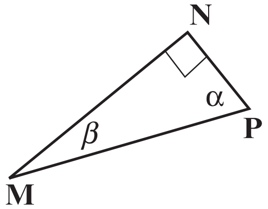
Aktiwiteit 1

1. ΔMNP is 'n reghoekige driehoek. Skryf die trig verhouding neer vir:

a) $\sin \alpha$ **b)** $\sin \beta$ (4)

c) $\tan \beta$ **d)** $\cos \alpha$ (3)

2. As MP = 13 en NP = 5, bereken $\cos \beta$.



[7]

Oplossings

1. a) $\sin \alpha = \frac{MN}{MP}$ ✓ (1) **b)** $\sin \beta = \frac{NP}{MP}$ ✓ (1)

c) $\tan \beta = \frac{NP}{MN}$ ✓ (1) **d)** $\cos \alpha = \frac{NP}{MP}$ ✓ (1) (4)

2. MP = 13 en NP = 5, dus kan ons MP bepaal.

$MP^2 = MN^2 + NP^2$ ……….Pythagoras ✓

$13^2 = MN^2 + 5^2$

$169 = MN^2 + 25$

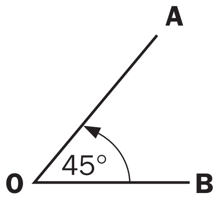
$MN^2 = 169 - 25$

$MN^2 = 144$ ✓

$\therefore MN = 12$

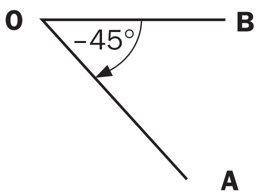
$\cos \beta = \frac{MN}{MP} = \frac{12}{13}$ ✓ (3)

[7]



NB

Hoeke wat antikloksgewys vanaf die x-as gemeet word, is positief.



NB

Hoeke wat kloksgewys vanaf die x-as gemeet word, is negatief.
$\therefore$ hoek is negatief

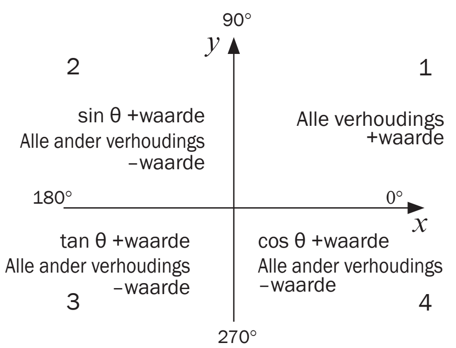
10.2 Trig verhoudings in al die kwadrante van die Cartesiese vlak

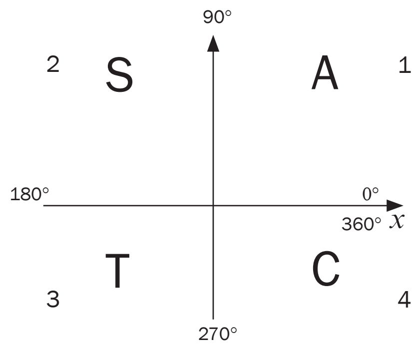
Die Cartesiese vlak het vier kwadrante (kwarte). Ons noem dit 1, 2, 3 en 4 beginnende by die kwadrant met positiewe x- en y-waardes. Ons kan trig verhoudings vir enige hoekgrootte in die Cartesiese vlak bereken.

wenk

CAST

Vir trig verhoudings wat positief is in die 4 kwadrante.





- In die eerste kwadrant is x, y en r positief. Daarom is al die trig funksies positief.
- In die tweede kwadrant is y en r positief, daarom is sin θ positief. In die tweede kwadrant is x negatief, daarom is cos θ en tan θ negatief.
- In die derde kwadrant is x en y negatief en daarom is tan θ positief. In die derde kwadrant is r positief en daarom is cos θ en sin θ negatief.
- In die vierde kwadrant is x en r positief en daarom is cos θ positief. In die vierde kwadrant is y negatief en daarom is sin θ en tan θ negatief.

Aktiwiteit 2

1. As sin θ negatief is en cos θ positief is, watter stelling is waar?

A. $0° < θ < 90°$ **B.** $90° < θ < 180°$

C. $180° < θ < 270°$ **D.** $270° < θ < 360°$ (1)

2. As tan $θ < 0$ en cos $θ < 0$, watter stelling is waar?

A. $0° < θ < 90°$ **B.** $90° < θ < 180°$

C. $180° < θ < 270°$ **D.** $270° < θ < 360°$ (1)

3. Sal die volgende trig verhoudings positief of negatief wees?

a) sin 315°

b) cos (–215°)

c) tan 215°

d) cos 390° (4)

[6]

Oplossings

1. Sin θ is negatief in die 3de en 4de kwadrante; cos θ is positief in die 1ste en 4de kwadrante.

Dus is θ in die 4de kwadrant. **D. $270° < θ < 360°$** ✓ (1)

2. tan $θ < 0$ in die 2de en 4de kwadrante; cos $θ < 0$ in die 2de en 3de kwadrante.

Dus is θ in die 2de kwadrant. **B. $90° < θ < 180°$** ✓ (1)

3. a) sin 315° is in die 4de kwadrant en is dus negatief. ✓ (1)

b) cos (–215°) is in die 2de kwadrant en is dus negatief. ✓ (1)

c) tan 215° is in die 3de kwadrant en is dus positief. ✓ (1)

d) cos 390° is dieselfde as cos 30° in die 1ste kwadrant, dus is dit positief. ✓ (1)

[6]

10.3 Los driehoeke op met trig

Vir party trigonometrie probleme is dit nuttig om 'n diagram te teken wat die betrokke hoek en die x, y en r waardes aantoon.

bv. 1

As $\tan\theta = -\sqrt{3}$ en $180° < \theta < 360°$, bepaal, met 'n diagram, die waarde van:

a) $\sin\theta$ **b)** $3\cos\theta$

Oplossings

a) $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1}$.

$180° < \theta < 360°$ en $\tan\theta$ is negatief in die 4de kwadrant

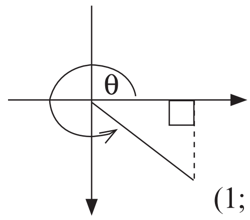
Met Pythagoras, $r^2 = x^2 + y^2$

$r^2 = (1)^2 + (-\sqrt{3})^2$

$r^2 = 1 + 3 = 4$

$r = 2$ ✓

$\therefore \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ✓(4)



b) $3\cos\theta$

$= 3(\frac{x}{r}) = 3(\frac{1}{2})$ ✓ $= \frac{3}{2} = 1{,}5$ ✓ (2)

[6]

Aktiwiteit 3

As $\cos\beta = \frac{p}{\sqrt{5}}$ waar $p < 0$ en $\beta \in [180°; 360°]$, bepaal, met 'n diagram, 'n uitdrukking in terme van p vir:

a) $\tan\beta$ **b)** $2\cos^2\beta - 1$

[6]

Oplossings

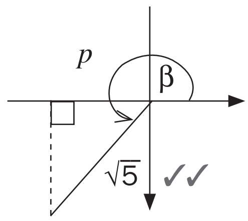
a) $\cos\beta = \frac{p}{\sqrt{5}} = \frac{x}{r}$; dus $x = p$ en $r = \sqrt{5}$

Met Pythagoras, $y^2 = r^2 - x^2$

$\therefore y^2 = (\sqrt{5})^2 - p^2$

$= 5 - p^2$

$\therefore y = \pm\sqrt{5 - p^2}$.



$\therefore y = -\sqrt{5 - p^2}$ ✓ aangesien β in die 3de kwadrant is, y is negatief.

$\therefore \tan\beta = \frac{-\sqrt{5 - p^2}}{p}$ ✓ (4)

b) $2\cos^2\beta - 1 = 2\left(\frac{p}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1$ ✓

$= \frac{2p^2}{5} - 1$ ✓ (2)

[6]

10.4 Gebruik 'n sakrekenaar om trig verhoudings te bepaal

Die wetenskaplike sakrekenaar bereken trigonometriese verhoudings as desimale breuke.

bv. 2

1. $\sin 58° = 0{,}8480480962....$ [Druk: sin 58 =]
2. $\cos 222° = -0{,}7431448255...$ [Druk: cos 222 =]
3. Bereken (korrek tot 2 desimale plekke):
   $\cos 238° \tan 132° = 0{,}5885349 \ldots \approx 0{,}59$ (tot 2 desimale plekke)
   [Druk: cos 238 × tan 132 =]
4. $\frac{\sin^2 327}{5+\tan 37} = 0{,}05155 \ldots \approx 0{,}052$ [NOTA: $\sin^2 327° = (\sin 327°)^2$]
5. $\sin 30° = \frac{1}{2}$

10.5 Die trig verhoudings van spesiale hoeke

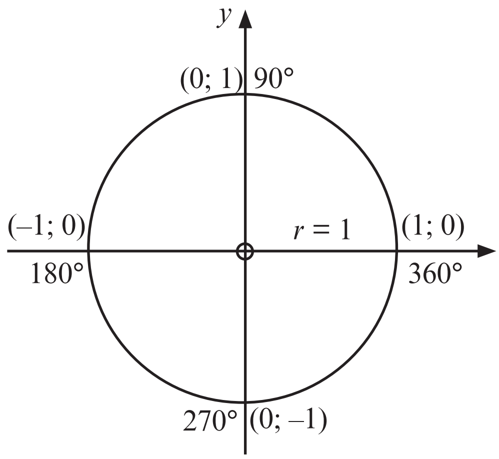
1. Spesiale trig verhoudings met die eenheidsirkel

Beskou 'n sirkel op die Cartesiese vlak met 'n radius van **een eenheid.**

Ons kan die trig verhoudings vir 0° (of 360°), 90°, 180° en 270° met die eenheidsirkel bepaal.

Benoem die $(x; y)$ koördinate op elke as.

Benoem die hoeke op elke as.



Uit die eenheidsirkel:

- By 0 *of* 360°: $x = 1$, $y = 0$ *en* $r = 1$
- By 90°: $x = 0$, $y = 1$ *en* $r = 1$
- By 180°: $x = -1$, $y = 0$ *en* $r = 1$
- By 27°: $x = 0$, $y = -1$ *en* $r = 1$

$\sin 0° = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\sin 90° = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 0° = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $\cos 90° = \frac{0}{1} = 0$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\tan 90° = \frac{1}{0}$ is ongedefinieerd

$\sin 180° = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\sin 270° = \frac{-1}{1} = -1$

$\cos 180° = \frac{-1}{1} = -1$ $\qquad$ $\cos 270° = \frac{0}{1} = 0$

$\tan 180° = \frac{0}{-1} = 0$ $\qquad$ $\tan 270° = \frac{-1}{0}$ is ongedefinieerd

NB

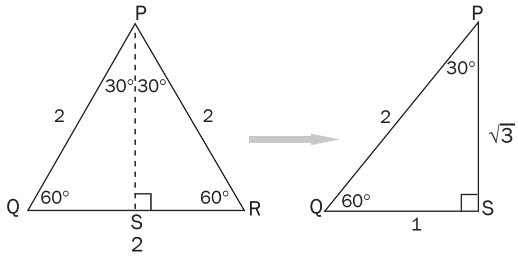
Opsomming

θ	0°	90°	180°	270°	360°
sin θ	0	1	0	–1	0
cos θ	1	0	–1	0	1
tan θ	0	ongedefinieerd	0	ongedefinieerd	0

2. Spesiale trig verhoudings met ’n gelyksydige driehoek

Ons gebruik ’n gelyksydige driehoek met sye van 2 eenhede om die trig verhoudings vir die spesiale hoeke **30°** en **60°** te bepaal. Die loodregte halveerder van een sy skep twee driehoeke. Die hoeke van ’n gelyksydige driehoek is gelyk, so hoek P, Q en R is elkeen 60°.

P is gehalveer, dus $Q\hat{P}S = R\hat{P}S = 30°$.



Met Pythagoras,

$PR^2 = PS^2 + RS^2$

$2^2 = PS^2 + 1^2$

$PS^2 = 4 - 1 = 3$

$\therefore PS = \sqrt{3}$

Nou kan ons ΔPQS gebruik om die trig verhoudings van 30° en 60° te bepaal.

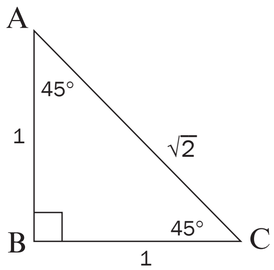
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad$ $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

3. Spesiale trig verhoudings met ’n reghoekige gelykbenige driehoek

Gebruik ’n reghoekige gelykbenige driehoek met sye van **een eenheid** om die trig verhoudings vir **45°** te bepaal. Die hoeke teenoor die gelyke sye is gelyk, so hulle is elkeen 45° (som van die hoeke in ’n Δ).



Met Pythagoras,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 1^2 + 1^2$

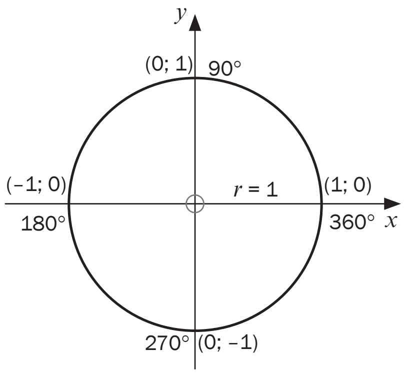
$AC^2 = 1 + 1 = 2$

$\therefore AC = \sqrt{2}$

Die skuinssy sal $\sqrt{2}$ eenhede wees.

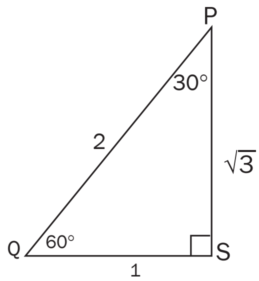
$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$

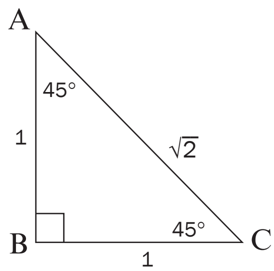
Opsomming van spesiale hoeke



Jy moet die spesiale hoeke **memoriseer** want jy gaan dit dikwels gebruik. Jy sal eksamenvrae gevra word waar jy nie 'n sakrekenaar mag gebruik nie, en moet wys hoe jy die spesiale hoeke gebruik het.

As jy net hierdie drie diagramme kan onthou, kan jy al die spesiale hoeke uitwerk.





As jy sukkel om die diagramme te onthou, kan jy hierdie opsomming van die spesiale hoeke leer:

θ	30°	45°	60°
sin θ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

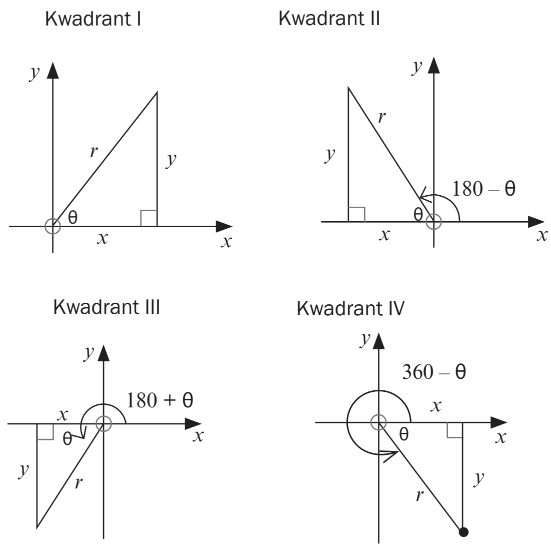
Jy kan ook 'n wetenskaplike sakrekenaar gebruik om hierdie spesiale hoekverhoudings te bepaal.

10.6 Gebruik reduksieformules

Kyk na die hoeke hier. As θ < 90°, is dit in die eerste kwadrant, daarom is θ 'n skerp hoek.

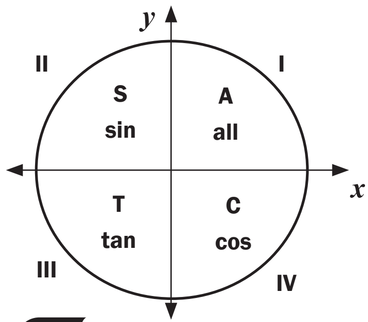
Daarom
- hoek (180° – θ) in kwadrant II
- hoek (180° + θ) in kwadrant III
- hoek (360° – θ) in kwadrant IV

Jy kan uitwerk watter trig verhoudings positief en watter negatief sal wees, volgens die kwadrante waarin hulle lê.



a) **Reduksieformules**

Kwadrant II: 180° – θ	Kwadrant III: 180°+ θ	Kwadrant IV: 360° – θ
sin(180° – θ) = sin θ	sin(180° + θ)= –sin θ	sin(360° – θ) = –sin θ
cos(180° – θ) = –cos θ	cos(180° + θ) = –cos θ	cos(360° – θ) = cos θ
tan(180° – θ) = –tan θ	tan(180° + θ) = tan θ	tan(360° – θ) = –tan θ



b) **Hoeke groter as 360°**
Ons kan 360° (of veelvoude van 360°) optel of aftrek en sal altyd 'n hoek in die eerste omwenteling kry. Byvoorbeeld, 390° kan geskryf word as (30° + 360°), dus het 390° dieselfde eindbeen as 30°.

c) **Negatiewe hoeke:**

- (–θ) lê in die vierde kwadrant en is dieselfde as 360° – θ.

sin(–θ) = –sin θ cos(–θ) = cos θ tan(–θ) = –tan θ

- (θ–180) lê in die derde kwadrant

sin(θ –180) = –sin θ cos(θ–180) = –cos θ tan(θ–180) = tan θ

- (–θ–180) lê in die tweede kwadrant

sin(–θ –180) = sin θ cos(–θ–180) = –cos θ tan(–θ–180) = –tan θ

- (θ–360) lê in die eerste kwadrant

sin(θ– 360) = sin θ cos(θ–360) = –cos θ tan(θ–360) = –tan θ

wenk

Wanneer jy deel, moet jy partykeer afrond tot die naaste getalle wat makliker is om mee te deel.

bv. 3

sin (360˚+ θ) = sin θ   cos (360˚+ θ) = cos θ   tan (360˚+ θ) = tan θ

Aktiwiteit 4

Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van:

1. cos 150°   **2.** sin (–45°)   **3.** tan 480°

[7]

Oplossings

1. cos 150° — herskryf as (180 – ?)
= cos(180° – 30°) — kwadrant II, cos θ negatief
= –cos 30° ✓ — spesiale verhoudings
= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓ (2)

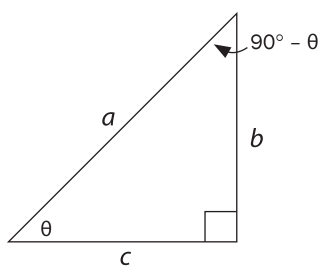
2. sin(–45°) — sin(–θ) = –sin θ; kwadrant IV, sin θ negatief
= –sin 45° ✓ — spesiale verhoudings
= $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ✓ (2)

3. tan 480° — skryf as 'n hoek in die eerste rotasie van 360°
= tan (480° – 360°)
= tan 120° ✓ — kwadrant II, herskryf as (180 – ?)
= tan (180° – 60°) — tan θ negatief
= –tan 60° ✓ — spesiale verhoudings
= $-\sqrt{3}$ ✓ (3)

[7]

d) **Ko-funksies**

In hierdie reghoekige driehoek, is die sye *a*, *b* en *c* en $\hat{B} = \theta$.
A = 90° en hoeke van 'n driehoek is supplementêr
$\therefore \hat{C} = (90° - \theta)$.
Kyk na die sinus en kosinus verhoudings vir die driehoek



sin θ = $\frac{b}{a}$ en cos (90° – θ) = $\frac{b}{a}$
∴ cos (90° – θ) = sin θ
cos θ = $\frac{c}{a}$ en sin (90° – θ) = $\frac{c}{a}$
∴ sin (90° – θ) = cos θ

Trig verhoudings van hoeke wat saam 90° is, word **ko-funksies** genoem.

NB

$\sin(90^\circ - \theta)$	$= \cos\theta$	(kwadrant I)
$\sin(90^\circ + \theta)$	$= \cos\theta$	(sin θ positief in kwadrant II)
$\sin(\theta - 90^\circ)$	$= \sin[-(90^\circ - \theta)]$	(gemeenskaplike faktor van –1)
	$= -\sin(90^\circ - \theta)$	(sin θ negatief in kwadrant IV)
	$= -\cos\theta$	
$\cos(90^\circ - \theta)$	$= \sin\theta$	(kwadrant I)
$\cos(90^\circ + \theta)$	$= -\sin\theta$	(cos θ negatief in kwadrant II)
$\cos(\theta - 90^\circ)$	$= \cos[-(90^\circ - \theta)]$	(gemeenskaplike faktor van –1)
	$= +\cos(90^\circ - \theta)$	(cos θ positief in kwadrant IV)
	$= +\sin\theta$	

Aktiwiteit 5

Skryf die trig verhoudings as die trig verhoudings van hulle ko-funksies:

1. sin 50° **2.** cos 70° **3.** sin 100° **4.** cos 140°

[4]

Oplossings

1. $\sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ$ ✓

2. $\cos 70^\circ = \cos(90^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$ ✓

3. $\sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10) = \cos 10^\circ$ ✓

4. $\cos 140^\circ = \cos(90^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ$ ✓

[4]

Opsomming

Enige hoek (stomp- of inspringende hoek) kan gereduseer word na ’n skerphoek deur die volgende te gebruik:

- Herlei negatiewe hoeke na positiewe hoeke
- Reduseer hoeke groter as 360°
- Gebruik reduksieformules
- Gebruik ko-funksies

Aktiwiteit 6

Vereenvoudig sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

1. $\dfrac{\sin(180° + x).\cos 330°.\tan 150°}{\sin x}$ (4)

2. $\dfrac{\cos 750°.\tan 315°.\cos(-\theta)}{\cos(360° - \theta).\sin 300°.\sin(180° - \theta)}$ (8)

3. $\dfrac{\tan 480°.\sin 300°.\cos 14°.\sin(-135°)}{\sin 104°.\cos 225°}$ (9)

4. $\dfrac{\cos 260°.\cos 170°}{\sin 10°.\sin 190°.\cos 350°}$ (7)

[28]

Oplossings

1. $\dfrac{\sin(180° + x).\cos 330°.\tan 150°}{\sin x}$ reduksieformules in teller

$\checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark$

$= \dfrac{(-\sin x)(+\cos 30°)(-\tan 30°)}{\sin x}$ (gebruik hakies om verhoudings te skei)

$= \dfrac{+\sin x.\frac{\sqrt{3}}{2}\checkmark.\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sin x}$ spesiale hoeke

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$= \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ (4)

2. $\dfrac{\cos 750°.\tan 315°.\cos(-\theta)}{\cos(360° - \theta).\sin 300°.\sin(180° - \theta)}$ gebruik reduksieformules

$= \dfrac{\cos 30°\checkmark.(-\tan 45°)\checkmark.\cos\theta\checkmark}{\cos\theta\checkmark.(-\sin 60°)\checkmark.\sin\theta\checkmark}$ gebruik spesiale hoeke

$= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}.(-1)\cos\theta}{\cos\theta.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin\theta}\checkmark$

$= \dfrac{-1}{-\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta}\checkmark$ (8)

3. $\dfrac{\tan 480°.\sin 300°.\cos 14°.\sin(-135°)}{\sin 104°.\cos 225°}$

$= \dfrac{\tan 120°.(-\sin 60)\checkmark.\cos 14°.\sin 225°}{\sin 76°\checkmark.(-\cos 45°)\checkmark}$

$= \dfrac{\cos(180° + 80°).\cos(180° - 10°)}{\sin 10°.\sin(180° + 10°).\cos(360° - 10°)}$

$= \dfrac{(-\tan 60°)\checkmark.(-\sin 60°).\sin 76°\checkmark.(-\sin 45°)\checkmark}{\sin 76°.(-\cos 45°)}$

$= \dfrac{(-\sqrt{3}).\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right).\sin 76.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}{\sin 76°.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}\checkmark\checkmark$

$= \dfrac{3}{2}\checkmark$ (9)

4. $\dfrac{\cos 260°.\cos 170°}{\sin 10°.\sin 190°.\cos 350°}$

$= \dfrac{-\cos 80°\checkmark.(-\cos 10°)}{\sin 10°.(-\sin 10°)\checkmark.\cos 10°\checkmark}$

$= \dfrac{(-\sqrt{3}).\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right).\sin 76.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}{\sin 76°.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)}\checkmark\checkmark$

$= \dfrac{-\sin 10°\checkmark.(-\cos 10°)}{\sin 10°.(-\sin 10°).\cos 10°}$

$= \dfrac{-1}{\sin 10°}\checkmark$ (7)

[28]

10.7 Trigonometriese identiteite

1. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $(\cos\theta \neq \theta)$
(die kwosiëntidentiteit)

2. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ → $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$; $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(die kwadraatidentiteit)

BEWYS VAN IDENTITEITE

Bewys van die identiteite is ontleedbaar waar die RK ontbind word tot sy x, y en r waardes.

Bewys : $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{y}{r} \div \frac{x}{r}$$

$$= \frac{y}{r} \times \frac{r}{x}$$

$$= \frac{y}{x} = \tan\theta$$

Bewys : $\sin^2\theta + \cos^2\theta$

$$= \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \qquad \text{Gebruik KGN } r^2$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{r^2} \qquad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{(Pythagoras)}$$

$$= \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Ons kan die identiteite en die reduksieformules gebruik om ons te help om trig uitdrukkings te vereenvoudig.

Aktiwiteit 7

Vereenvoudig die volgende uitdrukkings.

1. $\dfrac{\cos(180°-x)\sin(x-90°)-1}{\tan^2(540°+x)\sin(90°+x)\cos(-x)}$ (8)

2. $[\sin(-\theta)+\cos(360°+\theta)][\cos(\theta-90°)+\cos(180°+\theta)]$ (3)

3. $\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta)$ (3)

4. $\dfrac{1-\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}$ (3)

[17]

Oplossings

1. $\dfrac{\cos(180°-x)\sin(x-90°)-1}{\tan^2(540°+x)\sin(90°+x)\cos(-x)}$ – gebruik reduksieformules en ko-funksies

$= \dfrac{(-\cos x)✓\,(-\cos x)✓-1}{\tan^2(540°-360°+x)\cos x✓.\cos x✓}$ – vermenigvuldig teller en noemer reduksie van hoek > 360°

$= \dfrac{\cos^2 x-1}{\tan^2(180°+x).\cos^2 x}$ – gebruik trig identiteitformaat vir $\cos^2 x - 1$ reduksieformule

$= \dfrac{-(1-\cos^2 x)}{\tan^2 x✓.\cos^2 x}$ – gebruik trig identitieite vir $1-\cos^2 x$ en vir $\tan x$

$= \dfrac{-\sin^2 x✓}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}✓.\frac{\cos^2 x}{1}}$ – vereenvoudig

$= \dfrac{-\sin^2 x}{\sin^2 x} = -1$ ✓ (8)

2. $[\sin(-\theta)+\cos(360°+\theta)][\cos(\theta-90°)+\cos(180°+\theta)]$ – reduseer na hoek < 90°

$=[-\sin\theta+\cos\theta][\cos(-(90°-\theta))+(-\cos\theta)]$ – vereenvoudig; gebruik ko-funksies

$=(-\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)$ – vermenigvuldig met EBBL

$= -\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta$ ✓✓

$= -(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta$ – gebruik trig identiteit

$= -1+2\sin\theta\cos\theta$ – gebruik dubbelhoek identiteit

$= -1+\sin 2\theta$ ✓ (3)

3. $\cos^2\theta\,(1+\tan^2\theta)$ – vermenigvuldig die hakie

$= \cos^2\theta+\cos^2\theta.\tan^2\theta$ ✓ – gebruik trig identiteit vir $\tan\theta$

$= \cos^2\theta+\dfrac{\cos^2\theta}{1}.\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ – vereenvoudig

$= \cos^2\theta+\sin^2\theta$ ✓ $= 1$ ✓ – gebruik trig identiteit $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ (3)

4. $\dfrac{1-\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}$ – gebruik trig identiteit $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$= \dfrac{\sin^2\theta✓}{\cos^2\theta✓}$ – gebruik trig identiteit vir $\tan\theta$

$= \tan^2\theta$ ✓ (3)

[17]

10.8 Meer trig identiteite

Jy moet in staat kan wees om al die inligting oor trig verhoudings en maniere om dit te vereenvoudig te gebruik om ingewikkelder trig identiteite op te los.

Aktiwiteit 8

Bewys die volgende identiteite:

1. $\sin x \cdot \tan x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ (4)

2. $(\sin x + \tan x)\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) = \sin x .\ \tan x$ (7)

3. $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$ (6)

4. $\frac{1}{\tan x} + \tan x = \frac{\tan x}{\sin^2 x}$ (5)

[22]

Oplossings

1. LK: $\sin x .\ \tan x + \cos x$

$= \sin x .\ \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \checkmark + \cos x$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1}$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x \checkmark}{\cos x \checkmark} = \frac{1}{\cos x} \checkmark = \text{RK (4)}$

$\therefore \sin x .\ \tan x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ (4)

2. LK: $(\sin x + \tan x)\left(\frac{\sin x}{1+ \cos x}\right)$

$= \left(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \checkmark\right)\left(\frac{\sin x}{1+ \cos x}\right)$

$= \left(\frac{\sin x \cos x + \sin x \checkmark}{\cos x \checkmark}\right)\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$

$= \left(\frac{\sin x\,(\cos x + 1) \checkmark}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} \checkmark$ (7)

RK: $\sin x .\ \tan x$

$= \sin x .\ \frac{\sin x}{\cos x} \checkmark$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} \checkmark$

$\therefore$ LK = RK (7)

3. RK: $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$

$= \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \checkmark$

$= \frac{\cos^2 x + \sin x\,(1 + \sin x) \checkmark}{\cos x\,(1 + \sin x) \checkmark}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x \checkmark}{\cos x\,(1 + \sin x)}$ trig identiteit: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$= \frac{1 + \sin x \checkmark}{\cos x\,(1 + \sin x)}$

$= \frac{1}{\cos x} \checkmark = \text{LHS}$

$\therefore \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$ (6)

wenk

Wenke om trig identiteite op te los:

- Kies óf die **linkerkant** óf die **regterkant** en vereenvoudig dit om soos die ander kant te lyk.
- As albei kante moeilik lyk, kan jy probeer om albei kante te vereenvoudig tot jy by 'n punt kom waar albei kante dieselfde is.
- Dit is gewoonlik nuttig om $\tan \theta$ as $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ te skryf.
- Soms moet jy $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ na $\tan \theta$ vereenvoudig.
- As jy $\sin^2 x$ of $\cos^2 x$ met +1 of –1 het, gebruik die kwadraatidentiteite ($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$).
- Bepaal 'n gemeenskaplike noemer wanneer jy breuke optel of aftrek.
- Faktoriseer indien nodig – spesifiseer met voorbeelde, d.i. gemeenskaplike faktor, DOPS, trinoom, som/verskil van twee derdemagte

4. $\frac{1}{\tan x} + \tan x = \frac{\tan x}{\sin^2 x}$

LK: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ RK: $\frac{\tan x}{\sin^2 x}$

$= \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \frac{\sin x}{\cos x}$ ✓ $= \frac{\sin x}{\cos x}$ ✓$. \frac{1}{\sin^2 x}$

$= \frac{\cos x}{\sin x}$ ✓$+ \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \frac{1}{\sin x.\cos x}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x \checkmark}{\sin x.\cos x \checkmark}$

$= \frac{1}{\sin x.\cos x}$

$\therefore$ LK = RK (5)

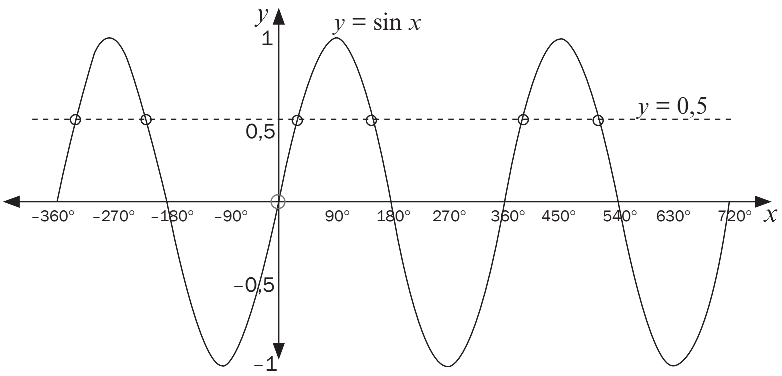
[22]

10.9 Los trigonometriese vergelykings op

Om ’n trig vergelyking op te los waar die hoek onbekend is, moet jy al die moontlike waardes van die hoek bepaal.

Byvoorbeeld, as $\sin \theta = \frac{1}{2}$, weet ons dat θ gelyk kan wees aan 30°. Daar is egter ander waardes vir θ in die ander kwadrante. Kyk na die grafiek vir
$\sin \theta = \frac{1}{2}$, $\theta \in [-360°; 720°]$.

Daar is ses waardes vir θ tussen –360° en 720°.



As 30° ons verwysingshoek in kwadrant I is:

In kwadrant II: $\sin (180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ Dus θ is 150°

In kwadrant III en IV, is die sinusverhouding negatief, so daar is geen oplossing vir θ nie.

Die hoek kan groter wees as 360°.

In kwadrant I: $\sin (360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ Dus θ is 390°

In kwadrant II: $\sin (540° - 30°) = \sin ((540° - 360°) - 30°)$

$= \sin (180° - 30°) = \sin 30 = \frac{1}{2}$ Dus θ is 510°

Jy kan ook uitwerk dat $\theta = -210°$ of $\theta = -330°$

Jy hoef nie ’n grafiek te teken om hierdie vergelykings op te los nie.

NB

’n Metode om die algemene oplossing van trig vergelykings te bepaal:

1. Isoleer die trig funksie aan een kant van die vergelyking.
2. Bepaal die verwysingshoek: druk die **positiewe** getal vir die hoek in die sakrekenaar en druk die trig sleutel en die inverse sleutel:

   shift sin / shift cos /shift tan.

   Gebruik spesiale hoeke indien die vraag jou nie toelaat om ’n sakrekenaar te gebruik nie.
3. Vir sin x en cos x, plaas die verwysingshoek in die twee moontlike kwadrante waar dit positief of negatief is (volgens die vraag). Die periode van die sinus- en kosinusgrafieke is 360°, tel dus k 360° by elke oplossing.
   Skryf altyd $k \in \mathbb{Z}$.
4. Vir tan x, sit die verwysingshoek in een korrekte kwadrant waar dit positief of negatief is (volgens die vraag). Die periode van die tangrafiek is 180°, tel dus k 180° by. Skryf altyd $k \in \mathbb{Z}$.
5. As x vir ’n gegewe interval opgelos moet word:
   a) Bepaal die algemene oplossing
   b) Vervang k met –1; 0; 1; 2, ens. om die oplossings in die korrekte interval te bepaal.

bv. 4

1. Los op vir x: sin $x = 0{,}7$ [Op jou sakrekenaar, druk: $\sin^{-1} 0{,}7 =$]
Die sakrekenaar se antwoord is 44,42……°
Ons noem dit die **verwysingshoek**, aangesien dit nie die enigste oplossing vir die vergelyking is nie.
sin x is positief, so hoek x moet in kwadrant I of kwadrant II in die eerste omwenteling wees.
In kwadrant I: $x = 44{,}42\ldots\ldots°$
EN
In kwadrant II: $x = 180° - 44{,}42\ldots° = 135{,}57\ldots\ldots°$
Die periode van die singrafiek is 360°, dus die ander punte van die snyding vind 360° na regs of links van hierdie oplossings plaas.
Ons tel k omwentelings by die twee hoeke in die eerste omwenteling.
k is 'n heelgetal (…–1; 0; 1; …). Ons noem hierdie die **algemene oplossings** van die vergelyking.
Ons kan dus sê dat die oplossing vir **sin x = 0,7** is
$x = 44{,}42° + k360°$ of $x = 135{,}57° + k360°$; $k \in \mathbb{Z}$.
(Korrek tot twee desimale plekke)

2. Los op vir x: sin $x = -0{,}7$
Plaas hierdie keer die verwysingshoek in kwadrant III en IV (sin x is negatief)
$x = 180° + 44{,}42\ldots..° + k360°$ of $x = 360° - 44{,}42\ldots..° + k360°$ $k \in \mathbb{Z}$
$x = 224{,}42° + k360°$ of $x = 315{,}57° + k360$; $k \in \mathbb{Z}$
(Korrek tot twee desimale plekke)

3. Los op vir x: cos $x = -0{,}7$ Verwysingshoek = 134,427….°
cos x is negatief in kwadrant II en III.
$x = 360° - 134{,}43° = 225{,}57°$
$x = 134{,}43° + k360°$ of $x = 225{,}57° + k360°$; $k \in \mathbb{Z}$
(Korrek tot twee desimale plekke)

4. Los op vir x: cos $x = 0{,}7$ Verwysingshoek = 45,57……°
Plaas hierdie keer die verwysingshoek in kwadrant I en IV waar cos x positief is:
$x = 45{,}57\ldots.° + k360°$ of $x = 360° - 45{,}57\ldots\ldots° + k360°$
$x = 45{,}57° + k360°$ of $x = 314{,}43° + k360°$; $k \in \mathbb{Z}$.
(Korrek tot twee desimale plekke)

5. Los op vir x: tan $x = 0{,}7$
tan x is positief in kwadrant I en III.
Verwysingshoek = 34,99° (korrek tot twee desimale plekke)
$x = 34{,}99\ldots.°$ of $180° + 34{,}99\ldots\ldots° = 214{,}99\ldots\ldots.°$
Die periode van die tangrafiek is nou 180°, so die ander snypunte vind 180° na regs of links van die oplossings plaas.
$x = 34{,}99° + k180°$; $k \in \mathbb{Z}$
(Korrek tot twee desimale plekke)

wenk

Jy hoef nie die oplossing vir 215° te skryf nie. Hierdie oplossing is alreeds daar want
34,99° + (1)180° = 215°

6. Los op vir x: tan $x = -0{,}7$
tan x is negatief in kwadrant II en IV.
Die verwysingshoek is $-34{,}99\ldots..°$
$180° - 34{,}99\ldots\ldots.° = 145{,}01\ldots..°$
$x = 145{,}01° + k180°$; $k \in \mathbb{Z}$.

Aktiwiteit 9

1. As $\cos 20° = p$, bepaal die volgende verhoudings in terme van p:

a) $\cos 380°$

b) $\sin 110°$

c) $\sin 200°$ (6)

2. Bepaal die algemene oplossing vir x in die volgende vergelykings:

a) $5 \sin x = \cos 320°$ (korrek tot twee desimale plekke)

b) $3 \tan x + \sqrt{3} = 0$ (sonder 'n sakrekenaar)

c) $\frac{\tan x - 1}{2} = -3$ (korrek tot een desimale plek) (10)

3. Bepaal x vir $x \in [-180°; 180°]$ as $2 + \cos(2x - 10°) = 2{,}537$ (6)

[22]

Oplossings

1. $\cos 20° = \frac{p}{1}$ dus $x = p$ en $r = 1$

Met Pythagoras, $y^2 = r^2 - x^2$

$y^2 = 1^2 - p^2 = 1 - p^2$

$y = \sqrt{1 - p^2}$ eerste kwadrant, dus y is positief

a) $\cos 380° = \cos(360° + 20°) = \cos 20°$ ✓ $= p$ ✓ (2)

b) $\sin 110°$ reduksieformule

$= \sin(180° - 70°)$

$= \sin 70°$ ✓ ko-funksie

$= \sin(90° - 20°)$

$= \cos 20°$ ✓ $= p$ ✓ (3)

c) $\sin 200° = \sin(180° + 20°)$

$= -\sin 20°$ ✓

$= \frac{-\sqrt{1 - p^2}}{1} = -\sqrt{1 - p^2}$ (1) (6)

2. a) $5 \sin x = \cos 320°$ ✓

$5 \sin x = 0{,}766044$

$\sin x = 0{,}15320...$ ✓

Verw. hoek $= 8{,}81°$

$x = 8{,}81° + k360°$ OF $x = 180° - 8{,}81° + k360°$ ✓

$x = 171{,}19° + k360°$ ✓ $k \in \mathbb{Z}$ (4)

Sakrekenaarsleutels:
cos 320 =
÷ 5 =
SHIFT sin ANS =

b) $3 \tan x + \sqrt{3} = 0$

$3 \tan x = -\sqrt{3}$

$\tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ ✓ [spesiale hoek: tan 30° $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$]

Verw. Hoek = 30°

$x = 180° - 30° + k180°$ ✓

$x = 150° + k180°$ ✓ $k \in \mathbb{Z}$ (3)

c) $\frac{\tan x - 1}{2} = -3$ vermenigvuldig albei kante met 2

$\tan x - 1 = -6$

$\tan x = -5$ ✓ verwysingshoek is 78,69…°

$\therefore x = 180° - 78,69…° + k180°$ ✓

$x = 101,31° + k180°; k \in \mathbb{Z}$ ✓ (3) (10)

3. $2 + \cos(2x - 10°) = 2,537$

$\cos(2x - 10°) = 0,537$

Verw. hoek $= 57,52…..°$

$2x - 10° = 57,52…..° + k360°$ of $2x - 10° = 360° - 57,52° + k360°$

[los vergelykings op]

$2x = 67,52….° + k360°$ of $2x = 312,48…° + k360°$ ✓

[deel albei terme aan albei kante deur 2]

$x = 33,76° + k180°$ of $x = 156,24° + k180°$ ✓ $k \in \mathbb{Z}$

$x \in [-180°; 180°]$

Dus vir $k = -1$: $x = 33,76° - 180° = -146,24°$ of $x = 156,24° - 180° = -23,76°$ ✓

Vir $k = 0$: $x = 33,76°$ of $x = 156,24°$ ✓

(Vir $k = 1$, sal $x > 180°$ wees, so dit is te groot)

Oplossing: $x \in \{-146,24°; -28,76°; 33,76°; 156,24°\}$ ✓✓ (6)

[22]

10.10 Nog oplossing van trig vergelykings met identiteite

NB

- $a \sin \theta = b \cos \theta$: enkele sin en cos funksie met dieselfde hoek

1) Deel deur die kosfunksie
2) Verander sin $\frac{\theta}{\cos \theta}$ na $\tan \theta$

bv. 5

Los op vir x (gee algemene oplossing) en rond jou antwoord af tot 2 desimale plekke.

1. $3 \sin x = 4 \cos x$

2. $4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + 1 = 0$

[6]

NB

- $a \sin \theta = b \cos \beta$: enkele sin- en cosfunksie met die verskillende hoeke
  1. Gebruik ko-funksies om dieselfde funksie te kry, d.i verander die sinfunksie na 'n cosfunksie of die cosfunksie na 'n sinfunksie.
  2. As $\sin\theta = \sin\beta$, stel ons die hoeke gelyk, dan is $\theta = \beta$ en $\theta = 180° - \beta$.

     As $\cos\theta = \cos\beta$ stel ons die hoeke gelyk dan is $\theta = \beta$ en $\theta = 360° - \beta$

Oplossings

1. $3 \sin x = 4 \cos x$ Deel albei kante deur $\cos x$ om $\tan x$ aan LK te kry

$\frac{3 \sin x}{\cos x} = \frac{4 \cos x}{\cos x}$ ✓ Trig identiteit vir $\tan x$

$3 \tan x = 4$

$\tan x = \frac{3}{4}$ ✓

Verw. hoek = 53,13°

$x = 53{,}13° + k180°\ k \in \mathbb{Z}$ ✓ (3)

2. $4 \cos^2 x + 4\sin x \cos x + 1 = 0$ gebruik $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

$4 \cos^2 x + 4\sin x \cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x)$ ✓ $= 0$

$5 \cos^2 x + 4\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$

$(5 \cos x + \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$

$5 \cos x + \sin x = 0$	of	$\cos x + \sin x = 0$
$\frac{5 \cos x}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x}$	of	$\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x}$
$5 = -\tan x \therefore \tan x = -5$		$1 = -\tan x \therefore \tan x = -1$
Verw. hoek = 78,69°		Verw. hoek = –45°
$x = 180° - 78{,}69° + k180°$	of	$\therefore x = 180° - 45° + k180°$
$\therefore x = 101{,}3° + k180°$ ✓		$\therefore x = 135° + k180°$ ✓ $k \in \mathbb{Z}$ (3)

[6]

bv. 6

Los op vir x (gee algemene oplossing) en rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

$\sin(x + 20°) = \cos 3x$ **[7]**

Oplossing

$\sin(x + 20°) = \cos 3x$	Gebruik ko-funksies
$\sin(x + 20°) = \sin(90° - 3x)$ ✓	Kies een hoek om die verwysingshoek te wees
Verw. hoek $= (90° - 3x)$	
$x + 20° = 90° - 3x + k360°$ ✓	of $x + 20° = 180° - (90° - 3x) + k360$ ✓
$4x = 70° + k360°$ ✓	$x + 20° = 180° - 90° + 3x + k360°$
$x = 17{,}5° + k90°$ ✓	$-2x = 70° + k360°$ ✓
	$x = -35° - k180°$ ✓ $k \in \mathbb{Z}$ **[7]**

bv. 7

1. $\sin^2 A - \sin A \cos A = 0$
2. $\cos^2 A - 2\cos A - 3 = 0$
3. $\cos^2 x + 3\sin x = -3$ **[16]**

Trigonometriese vergelykings wat na kwadratiese vergelykings lei

Oplossings

1. $\sin^2 A - \sin A \cos A = 0$

$\sin A(\sin A - \cos A) = 0$......✓.......faktoriseer deur middel van 'n GGF

$\therefore \sin A = 0$ of $\sin A - \cos A = 0$ ✓

$\therefore \sin A = 0$ of $\sin A = \cos A$

$\therefore A = 0° + 360°n$ ✓ of $\tan A = 1$ ✓

$\therefore A = 45° + 180°n$.......$n \in \mathbb{Z}$ ✓ (5)

2. $\cos^2 A - 2\cos A - 3 = 0$

$(\cos A + 1)(\cos A - 3) = 0$ ✓

$\therefore \cos A + 1 = 0$✓ of $\cos A - 3 = 0$

$\therefore \cos A = -1$ ✓ of $\cos A = 3$ ✓

$\therefore A = -180° + 360°n$ .....$n \in \mathbb{Z}$

as $\cos A = 3$....geen oplossing nie ✓ (5)

3. $\cos^2 x + 3\sin x = -3$ gebruik $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ om 'n kwadratiese vergelyking in $\sin x$ te maak

$1 - \sin^2 x + 3\sin x + 3 = 0$

$-\sin^2 x + 3\sin x + 4 = 0$

$\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$ ✓

$(\sin x - 4)(\sin x + 1) = 0$ ✓

$\sin x - 4 = 0$ of $\sin x + 1 = 0$

$\sin x = 4$ ✓ $\sin x = -1$ ✓

Geen oplossing nie ✓ Verw. hoek $= -90°$

$(-1 \leq \sin x \leq 1)$ $x = -90° + k360°$ of $x = 360° - 90° + k360°$

$x = 270° + k360°$ ✓ (6)

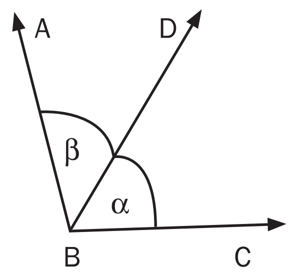
[16]

10.11 Saamgestelde en dubbelhoek identiteite

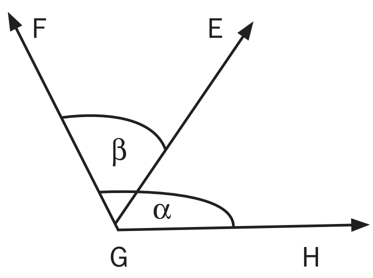
$\sin(20° + 30°) \neq \sin 20° + \sin 30°$

Wanneer twee hoeke opgetel of afgetrek word om 'n nuwe hoek te vorm, dan word 'n **saamgestelde** of 'n **dubbelhoek** gevorm.

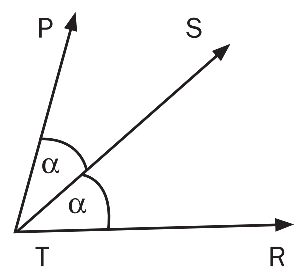
Skets 1



Skets 2



Skets 3



Skets 1: Die saamgestelde hoek $A\hat{B}C$ is gelyk aan die som van α en β
Bv. **75°** = 45° + 30°

Skets 2: Die saamgestelde hoek $E\hat{G}H$ is gelyk aan die verskil tussen α en β
Bv. **15°** = 60° – 45° of 15° = 45° – 30°

Skets 3: Die dubbelhoek $P\hat{T}R$ is gelyk aan die som van α en α
bv. **45°** = 22,5° + 22,5°

NOTA:
$\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$ **en**
$\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$

Deur dieselfde metodes te gebruik as wat ons gebruik het om die reduksieformules vas te stel, kan ons ook die saamgestelde hoek identiteite vasstel.

Gegee enige hoeke α en β, kan ons die waardes van die sinus en kosinus verhoudings van die hoeke α + β, α – β en 2α bepaal.

NB

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

In die finale eksamen word hierdie formules op die **inligtingsblad** verskaf.
Jy moet hierdie formules **leer** want jy gaan dit dikwels gebruik.

Aanvaar:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta,$$

En lei die ander saamgestelde hoekidentiteite af.

NB

Hierdie word in die eksamen gevra, leer dit goed.

Bewys:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] &= \cos\alpha.\cos(-\beta) + \sin\alpha.\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.(-\sin\beta)\\ &= \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta\end{aligned}$$

Bewys:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) = \cos[90° - (\alpha + \beta)] &= \cos[90° - \alpha - \beta] = \cos[(90° - \alpha) - \beta]\\ &= \cos(90° - \alpha).\cos(\beta) + \sin(90° - \alpha).\sin(\beta)\\ &= \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta\end{aligned}$$

Bewys:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) = \cos[90° - (\alpha - \beta)] &= \cos[90° - \alpha + \beta] = \cos[(90° + \beta) - \alpha]\\ &= \cos(90° + \beta).\cos\alpha + \sin(90° + \beta).\sin\alpha\\ &= -\sin\beta.\cos\alpha + \cos\beta.\sin\alpha\\ &= \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta\end{aligned}$$

bv. 8

Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. $\cos 70° \cos 10° + \cos 20° \cos 80°$

2. $2 \sin 15° \cos 15°$

3. $\sin 15°$ **[10]**

Oplossings

1. $\cos 70° \cos 10° + \cos 20° \cos 80°$

$= \cos 70° \cos 10° + \sin 70° \sin 10°$

$= \cos(70° - 10°)$ ✓

$= \cos 60°$ ✓

$= \frac{1}{2}$ ✓ (3)

2. $2 \sin 15° \cos 15°$

$= \sin 2(15°)$ ✓

$= \sin 30°$ ✓

$= \frac{1}{2}$ ✓ (3)

3. $\sin 15°$

$= \sin (45° - 30°)$ *n*

$= \sin 45°. \cos 30° - \cos 45°. \sin 30°$ *n*

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$ ✓✓

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ✓ $\times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ ✓ (4)

[10]

Aktiwiteit 10

MOENIE ’n sakrekenaar gebruik om hierdie vraag te beantwoord nie. Toon ALLE berekeninge. Bewys dat:

1. $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ (5)

2. Bewys dat $\cos(90° - 2x).\tan(180° + x) + \sin^2(360° - x) = 3\sin^2 x$ (7)

3. Bewys dat $(\tan x - 1)(\sin 2x - 2\cos^2 x) = 2(1 - 2\sin x \cos x)$ (7)

[19]

Oplossings

1. LK $= \cos 75° = \cos(45° + 30°)$ ✓

$= \cos 45°.\cos 30° - \sin 45°.\sin 30°$ ✓

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}$ ✓✓

$= \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1}{4}$ ✓ = RK (5)

2. LK $= \cos(90° - 2x).\tan(180° + x) + \sin^2(360° - x)$ — ko-funksies en reduksies

$= \sin 2x$✓. $\tan x$✓ + $\sin^2 x$✓ — dubbelhoek vir $\sin 2x$; trig identiteit vir $\tan x$

$= 2\sin x.\cos x$✓. $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ✓+ $\sin^2 x$ — vereenvoudig

$= 2\sin^2 x + \sin^2 x$✓

$= 3\sin^2 x$✓ = RK (7)

3. Daar is verskeie maniere om dit te bewys. Hier is een oplossing.

LK $= (\tan x - 1)(\sin 2x - 2\cos^2 x)$

$= \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right.$ ✓ $\left.- 1\right)(2\sin x.\cos x$✓ $- 2\cos^2 x)$ — dubbelhoekidentiteit vir $\sin 2x$

$= 2\sin^2 x - 2\sin x.\cos x - 2\sin x.\cos x + 2\cos^2 x$✓✓ — vermenigvuldig

$= 2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 2\cos^2 x$✓

$= 2(\sin^2 x - 2\sin x.\cos x + \cos^2 x)$✓ — trig identiteit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$= 2(1 - 2\sin x.\cos x)$✓ = RK (7)

[19]

Aktiwiteit 11

Bepaal die algemene oplossing vir x in die volgende:

a) $\sin 2x.\cos 10° - \cos 2x.\sin 10° = \cos 3x$ (8)
b) $\cos^2 x = 3\sin 2x$ (11)
c) $2\sin x = \sin(x + 30°)$ (5)
[24]

Oplossings

a) $\sin 2x.\cos 10° - \cos 2x.\sin 10° = \cos 3x$ gebruik saamgestelde hoekidentiteit

$\therefore \sin(2x - 10°)\checkmark = \cos 3x$ gebruik ko-funksies

$\therefore \sin(2x - 10°) = \sin(90° - 3x)\checkmark$

$\therefore 2x - 10° = 90° - 3x + k360°\checkmark$ of $2x - 10° = 180° - (90° - 3x) + k360°\checkmark\ k \in \mathbb{Z}$

$\therefore 5x = 100° + k360°\checkmark$ $\quad 2x - 10° = 90° + 3x + k360°$

$\therefore x = 20° + k72°\checkmark$ $\quad -x = 100 + k360°\checkmark$

$x = -100 - k360\ \checkmark\ k \in \mathbb{Z}$ (8)

b) $\cos^2 x = 3\sin 2x$ gebruik dubbelhoeke vir $\sin 2x$

$\cos^2 x = 3(2\sin x.\cos x)\checkmark$ maak LK = 0

$\cos^2 x - 3(2\sin x.\cos x) = 0$ vermenigvuldig

$\cos^2 x - 6\sin x.\cos x = 0\checkmark$ gemeenskaplike faktor

$\cos x(\cos x - 6\sin x)\checkmark = 0$

$\therefore \cos x = 0\checkmark$ of $\cos x - 6\sin x = 0\checkmark$

$\cos x = 0$ of $\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{6\sin x}{\cos x}$

$\cos x = 0$ of $1 = 6\tan x$

$\cos x = 0$ of $\tan x = \frac{1}{6}\checkmark$

Verwysingshoek = 90° of verwysingshoek = 9,46°

$\therefore x = 90° + k360°\checkmark$ of $x = 360° - 90° + k360°$ of $x = 9,46° + k180°\ \checkmark k \in \mathbb{Z}$

$x = 270° + k360°\checkmark$ of $x = 180° + 9,46° + k360°\checkmark k \in \mathbb{Z}$

$= 189,46° + k360°\ \checkmark\ k \in \mathbb{Z}$ (11)

c) $2\sin x = \sin(x + 30°)$

$2\sin x = \sin x.\cos 30° + \cos x.\sin 30°\checkmark$

$2\sin x = \sin x.\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x.\frac{1}{2}\checkmark$ vermenigvuldig met 2

$4\sin x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ deel deur $\cos x$

$4\tan x = \sqrt{3}\tan x + 1$

$4\tan x - \sqrt{3}\tan x = 1\checkmark$

$\tan x = \frac{1}{4 - \sqrt{3}}\ \checkmark$

$x = 23,79° + k180°;\ k \in \mathbb{Z}\ \checkmark$ (5)

[24]

10.12 Bepaal x waarvoor die identiteit ongedefinieerd is

NB

- $\frac{\textit{enige getal}}{0}$ is ongedefinieerd
  As die noemer van 'n identiteit dus = 0, dan is die identiteit ongedefinieerd.
- $y = \tan x$ is ongedefinieerd vir sekere waardes van x. As 'n tanfunksie dus in 'n identiteit is, dan is die identiteit ongedefinieerd waar die tanfunksie ongedefinieerd is.

bv. 9

Vir watter waardes van x is hierdie identiteit ongedefinieerd?

$\frac{1}{\tan x} + \tan x = \frac{\tan x}{\sin^2 x}$

[4]

Oplossing

$\frac{1}{\tan x} + \tan x = \frac{\tan x}{\sin^2 x}$ is ongedefinieerd as $\tan x = 0$ of $\sin^2 x = 0$ of as $\tan x$ ongedefinieerd is

[deling deur 0 is ongedefinieerd]

as $\tan x = 0$	OF	as $\sin^2 x = 0$	OF	$\tan x$ is ongedefinieerd
$x = 0° + k180°$ ✓	OF	$\sin x = 0$ ✓✓		$x = 90° + k180°$ ✓ (4)
$x = 0° + k360°$	OF	$x = 180° + k360°$		

Dus is die identiteit ongedefinieerd vir $x = 0° + k360°$ of $x = 180° + k360°$ of $x = 90° + k180°$

Al hierdie oplossings is dieselfde as $x = 0° + k90°$ vir $k \in \mathbb{Z}$.

[4]

Wat jy moet kan doen:

- Vereenvoudig uitdrukkings, sonder 'n sakrekenaar, deur gebruik te maak van 'n skets.
- Gebruik reduksieformules en/of ko-funksies
- Gebruik spesiale hoeke
- Lei die trig identiteit af en gebruik dit: (Kwosiënt, kwadraat, saamgestelde en dubbelhoek identiteite).
- Bepaal vir watter waardes 'n identiteit ongedefinieerd is
- Bepaal die algemene oplossing van trigonometriese vergelykings
- Los trigonometriese vergelykings met 'n gegewe interval op
- Gebruik identiteite om identiteite te bewys en vergelykings op te los.

eksamen

Feb/Maart 2014 V8 & V9.1 & 9.2

Nov 2013 V10 & V11

Feb/Maart 2013 V8 & V9

Nov 2012 V8 & V9

Feb/Maart 2012 V11 & V12

Nov 2011 V9.1 & 9.2 & V12

Feb/Maart 2011 V10

11 Eenheid

Trigonometrie: Sinus, kosinus en oppervlaktereëls

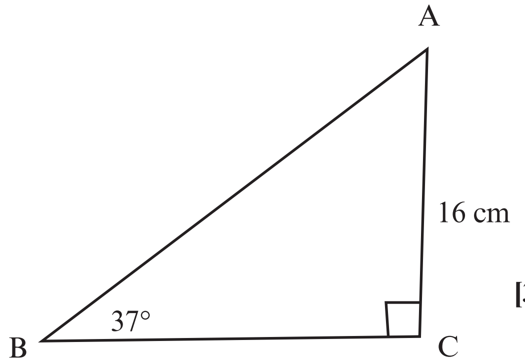
Ons gebruik hierdie reëls om die lengtes van sye, groottes van hoeke en die oppervlakte van enige soort driehoek te bepaal. Om 'n "driehoek op te los", beteken jy moet die onbekende sye en hoeke bereken.

11.1 Reghoekige driehoeke

Jy kan die trig verhoudings gebruik om hoeke en lengtes van 'n reghoekige driehoek te bepaal.

Aktiwiteit 1

In driehoek ABC, $\hat{B} = 37°$ en AC = 16 cm. $\hat{C} = 90°$. Bereken die lengte van AB en BC (korrek tot een desimale plek) (3)



[3]

Oplossing

Om die lengte van AB te bereken, gebruik 37° as die verwysingshoek, dan is AC = 16 cm die teenoorstaande sy en AB die skuinssy. Gebruik die sinusverhouding

$\sin 37° = \frac{\text{teenoorst}}{\text{skuins}} = \frac{16}{AB}$

$AB \sin 37° = 16$

$AB = \frac{16}{\sin 37°} = 26{,}6$ cm ✓

Om die lengte van BC te bereken, kan jy die volgende gebruik

$\cos 37° = \frac{\text{aangr}}{\text{skuins}} = BC/26.6$

$26{,}6 \cos 37° = BC$ ✓

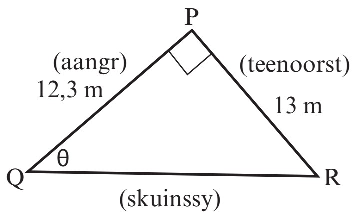
$BC = 21{,}2$ cm (tot een desimale plek) ✓

Jy kan ook die Stelling van Pythagoras gebruik:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ **[3]**

Aktiwiteit 2

In driehoek PQR, PQ = 12,3 m en PR = 13 m. Bereken die grootte van Q. (2)



[2]

Oplossing

Gebruik PQ en PR.

$\tan \theta = \frac{\text{teenoorst}}{\text{skuins}} = \frac{13}{12.3}$ ✓

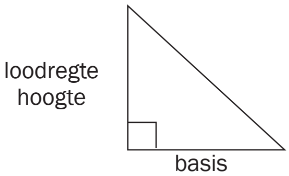
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{13}{12.3}\right) = 46{,}58°$ ✓ **[2]**

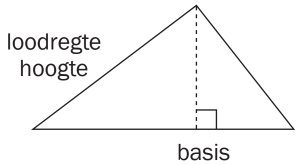
11.2 Oppervlaktereël

Oppervlakte van reghoekige driehoek:

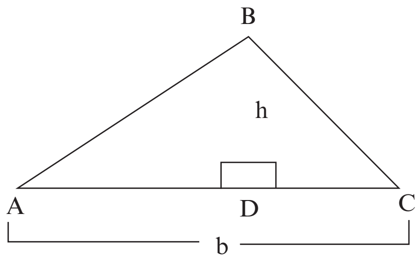
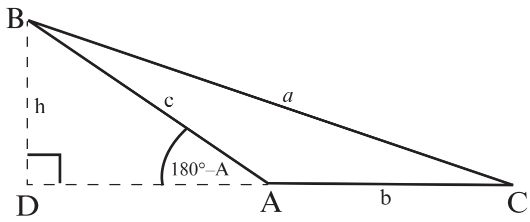
Oppervlakte $\Delta = \frac{1}{2}$ basis x loodregte hoogte

Oppervlakte $\Delta = \frac{1}{2} bh$





Bewys van Oppervlaktereël [LEER VIR EKSAMENDOELEINDES]

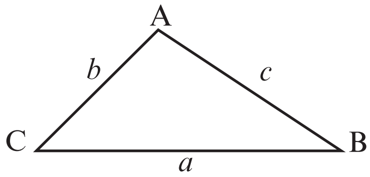
As $\hat{A}$ 'n skerphoek is	As $\hat{A}$ 'n stomphoek is
	
Oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bh$...............(1) Maar $\sin A = \frac{h}{c}$ $\therefore h = c \sin A$ Vervang in (1) in Oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$ Net so kan dit aangetoon word dat Oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$ $= \frac{1}{2} ac \sin B$	Oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bh$...............(1) Maar $\sin(180° - A) = \frac{h}{c}$ $\therefore h = c \sin A$ Vervang in (1) in Oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bc \sin A$ Net so kan dit aangetoon word dat Oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$ $= \frac{1}{2} ac \sin B$

NB

As die basis of hoogte onbekend is, kan jy trig verhoudings gebruik om dit uit te werk. As die loodregte hoogte nie gegee is en nie uitgewerk kan word nie, dan het ons 'n ander oppervlakteformule nodig.

Daar is 'n formule wat werk om die oppervlakte van enige driehoek te bepaal, selfs al weet ons nie wat die loodregte hoogte is nie.

Die oppervlakte van enige ΔABC is die helfte van die produk van twee sye en sinus van die ingeslote hoek.



As jy dus kies om hoek A te gebruik, dan is

Oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2}\boldsymbol{bc}\sin A$

As jy kies om hoek B te gebruik, dan is

Oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2}\boldsymbol{ac}\sin B$

As jy kies om hoek C te gebruik dan is

Oppervlakte $\Delta ABC = \frac{1}{2}\boldsymbol{ab}\sin C$

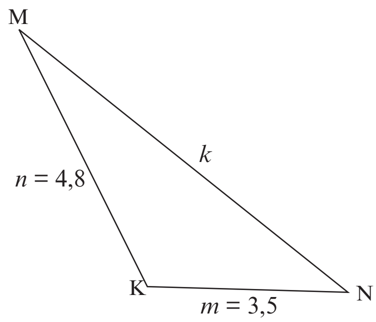
Leer een vorm van die formule – jy kan die ander daarvandaan uitwerk.

Om die oppervlakte van enige driehoek te bepaal, moet jy weet wat die lengtes van twee sye en die grootte van die hoek tussen die twee sye is.

bv. 1

Bereken die oppervlakte van ΔMNK met $m = 3,5$ cm; $n = 4,8$ cm en $\hat{K} = 112°$.

Kies die weergawe van die formule wat sy m en sy n en hoek K gebruik, want dit is die bekende waardes.



Oppervlakte Δ MNK $= \frac{1}{2}mn\sin K$

$= \frac{1}{2}(3,5)(4,8)\sin 112°$

$= 8,4\sin 112°$

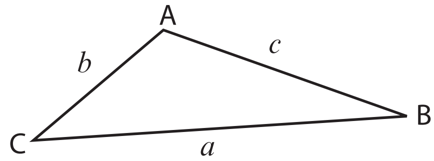
$= 7,788$ cm² (korrek tot drie desimale plekke)

11.3 Sinusreël

As jy genoeg inligting oor die sye en hoeke van enige driehoek het, kan jy die sinusreël gebruik om die ander sye en hoeke te bepaal.

Sinusreël

Die verhouding van die sinus van die hoek gedeel deur die sy teenoor daardie hoek is dieselfde vir al drie pare sye en hoeke.



Dus ...

In enige driehoek ABC:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

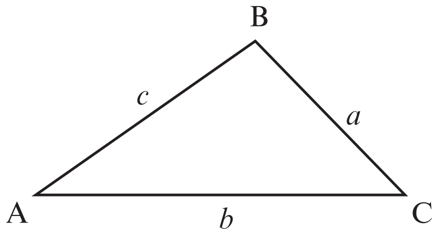
Ons kan ook die verhoudings met die sye in die noemer gebruik:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

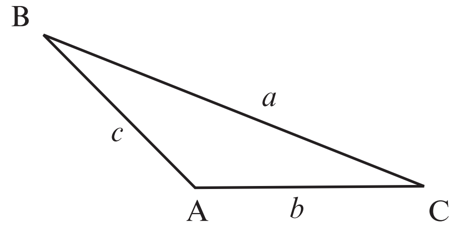
Die formule sal op die inligtingsblad verskaf word

Bewys van Sinusreël [LEER VIR EKSAMENDOELEINDES]

As $\hat{A}$ 'n skerphoek is



As $\hat{A}$ 'n stomphoek is

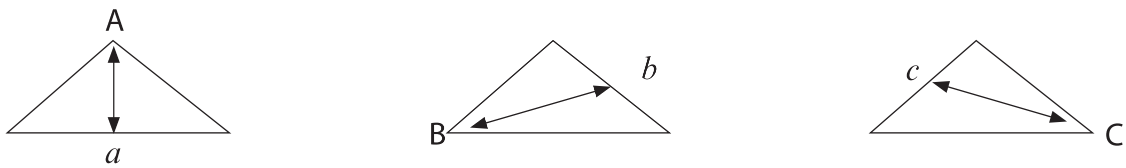


Gebruik die Oppervlaktereël vir ΔABC:

$$\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B$$

Deur elkeen deur $\frac{1}{2}abc$ te deel, gee $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$

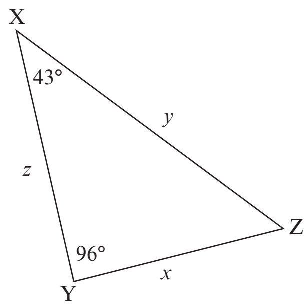
Om die **sinusreël** te gebruik, moet jy weet wat ten minste een sy en sy ooreenstemmende teenoorstaande hoek en nog 'n sy of hoek is.



Die sinusreël kan gebruik word om baie probleme op te los as die korrekte inligting oor die driehoek gegee is.

Aktiwiteit 3

Los op vir ΔXYZ waarin $z = 7{,}3\ m$, $\hat{X} = 43°$ en $\hat{Y} = 96°$. Gee jou oplossings korrek tot drie desimale plekke. (4)



[4]

Oplossing

Die hoek teenoor die bekende sy is nie gegee nie, maar jy kan dit uitwerk.

$\hat{Z} = 180° - (43° + 96°)$ (som van hoeke van Δ)

$\hat{Z} = 41°$ ✓

Om y te bepaal: $\frac{y}{\sin 96°} = \frac{7{,}3}{\sin 41°}$ ✓

$y = \frac{7{,}3 \sin 96°}{\sin 41°}$

$y = 11{,}066$ m ✓

Gebruik weer die sinusreël om x te bepaal:

$\frac{x}{\sin 43°} = \frac{7{,}3}{\sin 41°}$

$x = \frac{7{,}3 \sin 43°}{\sin 41°}$

$x = 7{,}589$ m ✓

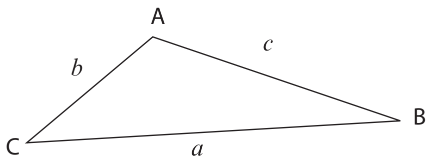
[4]

11.4 Kosinusreël

Jy kan die kosinusreël toepas as die waardes van die volgende gegee word:

- Twee sye en die ingeslote hoek OF
- Drie sye van 'n driehoek

Kosinusreël:
In enige driehoek ABC:



As jy kies om hoek A te gebruik, dan

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

As jy kies om hoek B te gebruik, dan

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

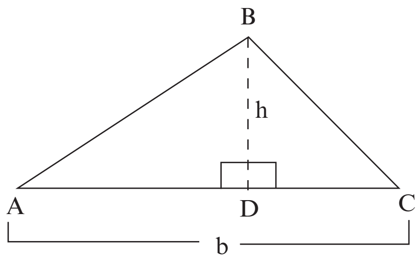
As jy kies om hoek C te gebruik, dan

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Bewys van die kosinusreël [LEER VIR DIE EKSAMEN]

<table>
<tr>
<td>

As $\hat{A}$ 'n skerphoek is



In ΔBDC: $a^2 = BD^2 + CD^2$ (Stelling van Pythagoras)
$= BD^2 + (b - AD)^2$
$= BD^2 + b^2 - 2bAD + AD^2$
Maar $BD^2 + AD^2 = c^2$ (Stelling van Pythagoras)

Dus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD$ ....(1)

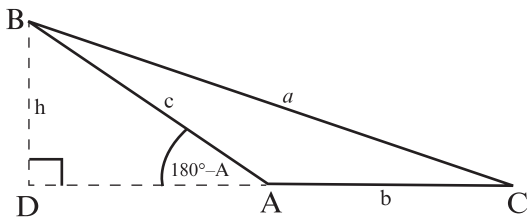
In Δ ABD: $\cos A = \frac{AD}{c}$ $\therefore$ $AD = c \cos A$ ....(2)

Vervang (2) in (1) in
$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Net so kan dit aangetoon word dat:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ en
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

</td>
<td>

As $\hat{A}$ 'n stomphoek is



In ΔBDC: $a^2 = BD^2 + CD^2$ (Stelling van Pythagoras)
$= BD^2 + (b + AD)^2$
$= BD^2 + b^2 + 2bAD + AD^2$
Maar $BD^2 + AD^2 = c^2$ (Stelling van Pythagoras)

Dus $a^2 = b^2 + c^2 + 2bAD$ ....(1)

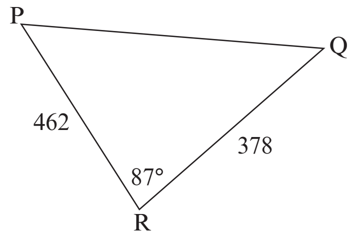
In ΔABD:.
$\cos(180° - A) = \frac{AD}{c}$ $\therefore$ $AD = -c \cos A$..........(2)

Vervang (2) in (1) in
$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Net so kan dit aangetoon word dat:
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ en
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

</td>
</tr>
</table>

bv. 2



1. Los op vir ΔPQR as $q = 462$ mm, $p = 378$ mm en $\hat{R} = 87°$.

Gebruik die kosinusreël
(twee sye en die ingeslote hoek is gegee, so jy kan die sy teenoor die gegewe hoek bepaal)

$PQ^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos R$
$PQ^2 = (378)^2 + (462)^2 - 2(378)(462).\cos 87°$
$PQ^2 = 338\ 048{,}5159$
$PQ = 581{,}42$ mm [neem die vierkantswortel]

Gebruik die sinusreël:

$\frac{378}{\sin P} = \frac{581{,}42}{\sin 87°}$

$\frac{\sin P}{378} = \frac{\sin 87°}{581{,}42}$ (dit is makliker om $\hat{P}$ in die teller te hê)

$\sin P = \frac{378 \times \sin 87°}{581{,}42}$

$\sin P = 0{,}649$

$\hat{P} = \sin^{-1}(0{,}649) = 40{,}48°$

$\therefore \hat{Q} = 180° - (87° + 40{,}48°) = 52{,}52°$ [som van die hoeke van Δ]

2. Bepaal die grootste hoek in ΔABC as $a = 7$ cm; $b = 9$ cm en $c = 15$ cm.
Drie sye is vir jou gegee, gebruik die kosinusreël
Die grootste hoek sal $\hat{C}$ wees (teenoor die langste sy).

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\ 2ab\cos C &= a^2 + b^2 - c^2 \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}\right\} \text{herrangskik die formule om } \cos C \text{ op sy eie te kry}$$

$\cos C = \frac{7^2 + 9^2 - 15^2}{2(7)(9)}$

$\cos C = -0{,}753968\ldots$ cos θ is negatief in kwadrant II,
dus is $\hat{C}$ 'n stomphoek.
Verwysingshoek is 41,06°

$\hat{C} = 180° - 41{,}064\ldots° = 138{,}94°$ (korrek tot twee desimale plekke)

11.5 Probleme in twee en drie dimensies

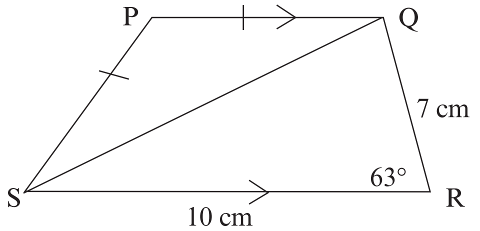
Aktiwiteit 4

1. PQRS is'n trapesium met PQ // SR, PQ = PS, SR = 10 cm, QR = 7 cm, $\hat{R}$= 63°.
Bereken:

a) SQ (2)

b) PS (6)

c) oppervlakte van vierhoek PQRS. (korrek tot twee desimale plekke) (5)



[13]

Wanneer driehoeke opgelos word, begin met die driehoek met die meeste inligting (d.i. driehoek met drie sye of twee sye en 'n hoek of twee hoeke en 'n sy wat gegee is)

Oplossings

a) In Δ QSR, weet jy wat twee sye en die ingeslote hoek is, so gebruik die kosinusreël.

$SQ^2 = 7^2 + 10^2 – 2(7)(10)\cos 63°$ ✓

$SQ^2 = 85,44…$ bepaal die vierkantswortel

SQ = 9,24 cm ✓ (2)

b) In Δ PQS, weet jy dat PQ = PS en jy het uitgewerk dat SQ = 9,24 cm.

Dink eers oor die vraag

As jy $\hat{P}$ kan bepaal, dan kan jy die sinusreël gebruik om PS te bepaal.

Om $\hat{P}$ te bepaal, moet jy eers $P\hat{Q}S$ of $P\hat{S}Q$ bepaal.

$P\hat{Q}S = P\hat{S}Q$ (verwisselende hoeke, PQ // SR)

Nou kan jy 'n waarde vir $Q\hat{S}R$ uitwerk.

In $\Delta Q\hat{S}R$, is drie sye en $\hat{R}$ bekend.

Dit is dus die maklikste om die sinusreël te gebruik om $Q\hat{S}R$ te bepaal.

$\frac{\sin Q\hat{S}R}{7} = \frac{\sin 63°}{9,24}$ ✓

$\sin Q\hat{S}R = \frac{7 \sin 63°}{9,24} = 0,675004$

$\therefore Q\hat{S}R = 42,45°$ ✓

$P\hat{Q}S = Q\hat{S}R = 42,45°$ (verwisselende hoeke, PQ // SR)

$P\hat{Q}S = P\hat{S}Q = 42,45°$ (basishoeke van gelykbenige Δ)

$\therefore \hat{P} = (180° – (42,45° + 42,45°)$ ✓

= 95,1° ✓ (som van hoeke in Δ)

Nou kan ons PS bepaal deur die sinusreël en $\hat{P}$ te gebruik.

In ΔPQS $\frac{PS}{\sin 42,45°} = \frac{9,24}{\sin 95,1}$ ✓

$PS = \frac{9,24 \sin 42,45°}{\sin 95,1}$

PS = 6,26 cm ✓ (6)

c) Om die oppervlakte van PQRS te bepaal, bepaal die oppervlakte van die twee driehoeke en tel dit bymekaar.

Om die oppervlakte van ΔPQS te bepaal, gebruik $\hat{P} = 95{,}1°$ en $PS = PQ = 6{,}26$ cm.

Oppervlakte $\Delta PQS = \frac{1}{2} qs \sin P$ ✓

Oppervlakte $\Delta PQS = \frac{1}{2}(6{,}26)(6{,}26)\sin 95{,}1°$

Oppervlakte $\Delta PQS = 19{,}52$ m² ✓

Om die oppervlakte van ΔRQS te bepaal, gebruik $\hat{R} = 63°$, $QR = 7$ cm en $SR = 10$ cm.

Oppervlakte $\Delta RQS = \frac{1}{2}(7)(10)\sin 63$ ✓

Oppervlakte $\Delta RQS = 31{,}19$ m² ✓

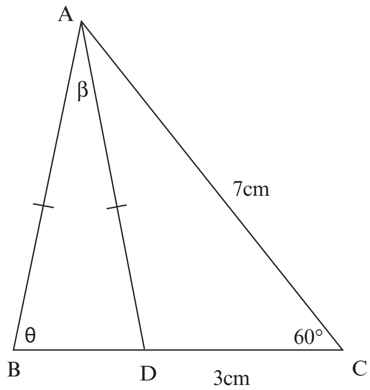
$\therefore$ Oppervlakte $PQRS = 19{,}52 + 31{,}19 = 50{,}71$ m² ✓ (5)

[13]

Aktiwiteit 5

In die diagram hier langsaan, $AC = 7$ cm, $DC = 3$ cm, $AB = AD$, $D\hat{C}A = 60°$, $D\hat{A}B = \beta$ en $A\hat{B}D = \theta$.

Toon aan dat $BD = \frac{\sqrt{37}\sin\beta}{\sin\theta}$



[3]

Oplossing

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC.CD\cos 60° = (7)^2 + (3)^2 - 2 \times 7 \times 3 \times 0{,}5$ ✓

$AD^2 = 58 - 21$

$AD^2 = 37$

$AD = \sqrt{37}$ P

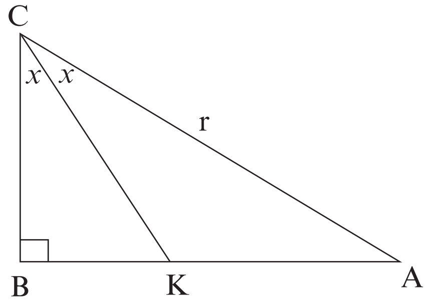
Pas die sinusreël toe:

$\frac{BD}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\theta} \Rightarrow BD = \frac{AD\sin\beta}{\sin\theta}$ maar $AD = \sqrt{37}$ ✓

$\therefore BD = \frac{\sqrt{37}\sin\beta}{\sin\theta}$ ✓

[3]

Aktiwiteit 6



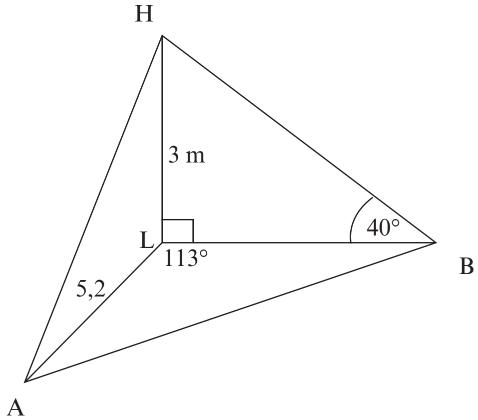
1. In die diagram hier langsaan, is ABC 'n reghoekige driehoek.

KC is die halveerder van $A\hat{C}B$. AC = r eenhede en $B\hat{C}K = x$

1.1 Skryf AB neer in terme van x (2)

1.2 Gee die grootte van $A\hat{K}C$ in terme van x (2)

1.3 As dit gegee word dat $\frac{AK}{AB} = \frac{2}{3}$, bereken die waarde van x (7)



2. A, B en L is punte op dieselfde horisontale vlak, HL is 'n vertikale pool met lengte 3 meter, AL = 5,2 m, die hoek $A\hat{L}B = 113°$ en die hoogtehoek van H na B is 40°.

2.1 Bereken die lengte van LB (3)

2.2 Bereken gevolglik die lengte van AB. (3)

2.3 Bepaal die oppervlakte van ΔABL. (3)

3. Die hoogtehoek vanaf 'n punt C op die grond, by die middelpunt van die doelpaal, na die hoogste punt A van die boog, direk bokant die middelpunt van die Moses Madhiba sokkerstadion is 64,75°. Die sokkerveld is 100 meter lank en 64 meter wyd soos bepaal deur FIFA vir wêreldbekerstadions. Verder is AC ⊥ PC.

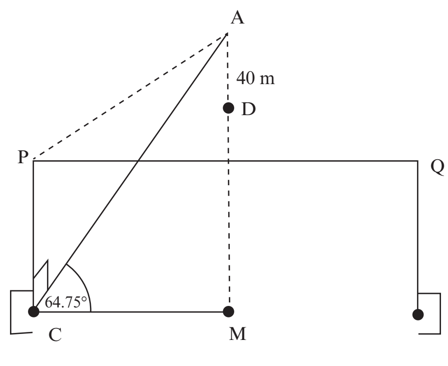
In die figuur hieronder is PQ = 100 meter en PC = 32 meter

3.1 Bepaal AC (2)

3.2 Bereken $P\hat{A}C$ (2)

3.3 'n Kamera word by D, 40 m direk onder punt A geplaas, bereken die afstand vanaf D na C. (4)

[28]



Oplossings

1.1 $\sin 2x = \frac{AB}{r} \therefore AB = r\sin 2x$ ✓✓ (2)

1.2 $A\hat{K}C = 90° + x$ [buitehoek van ΔCBK] ✓✓ (2)

1.3 $\frac{AK}{\sin x} = \frac{r}{\sin(90° + x)} \therefore AK = \frac{r\sin x}{\cos x}$ ✓✓

$\frac{AK}{AB} = \frac{\frac{r\sin x}{\cos x}}{r\sin 2x} = \frac{r\sin x}{r\cos x.2\cos x\sin x} = \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{2}{3}$ ✓✓

$\therefore \cos^2 x = \frac{3}{4}$ ✓

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✓

Gevolglik $x = 30^0$ ✓ (7)

2.1 In ΔHLB, $\tan 40° = \frac{3}{LB}$ ✓

[ΔHLB is reghoekig, gebruik dus 'n trig verhouding]

$LB = \frac{3}{\tan 40^0}$ ✓

$LB = 3{,}5752\ldots \approx 3{,}58$ meter ✓ (3)

2.2 In ΔABL,

[ΔABL is nie 'n reghoekige driehoek nie. Jy het twee sye en 'n ingeslote hoek, gebruik dus die kosinusreël.]

$AB^2 = AL^2 + BL^2 - 2(AL)(BL).\cos L$ ✓

$AB^2 = (5{,}2)^2 + (3{,}58)^2 - 2(5{,}2)(3{,}58).\cos 113°$ ✓

$AB^2 = 54{,}40410\ldots\ m^2$

$AB = 7{,}38$ m ✓ (3)

2.3 Oppervlakte $\Delta ABL = \frac{1}{2} AL \times BL \times \sin A\hat{L}B$ ✓

$= \frac{1}{2}(5{,}2) \times (3{,}58) \times \sin 113°$ ✓

$= 8{,}56805\ldots$ ✓

$\approx 8{,}57\ m^2$ (3)

3.1 $\cos 64{,}750° = \frac{CM}{AC} \therefore AC = \frac{CM}{\cos 64{,}75^0} = \frac{50m}{0{,}426569} = 117{,}21$ ✓✓ (2)

3.2 $\tan P\hat{A}C = \frac{PC}{AC}$

$P\hat{A}C = \tan^{-1}\left(\frac{32}{AC}\right)$ ✓

$= 15{,}27^0$ ✓ (2)

3.3 $DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD\cos(90^0 - 64{,}75^0)$ ✓

$DC^2 = (117{,}21)^2 + (40)^2 - 2(117{,}21).40\cos(25{,}25^0)$ ✓

$= 6857{,}289$ ✓

$DC = 82{,}81$ m ✓ (4)

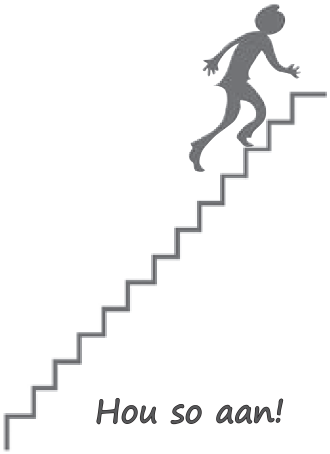
[28]

Wat jy moet kan doen:

- Lei die trig identiteite af en gebruik dit: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ en $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
- Lei reduksieformules af en gebruik dit om uitdrukkings te vereenvoudig.
- Bepaal vir watter waardes van 'n veranderlike 'n identiteit geldig is.
- Lei die sinus-, kosinus- en oppervlaktereëls af en gebruik dit.
- Pas die sinus-, kosinus- en oppervlaktereëls toe om driehoeke in 2D- en 3D-probleme op te los.
- Gebruik die saamgestelde hoek en dubbelhoekidentiteite waar nodig om berekeninge te bewys en te doen.

eksamen

November 2013	Vraag 13
Feb/Maart 2013	Vraag 11
Feb/Maart 2012	Vraag 12
November 2012	Vraag 12
November 2011	Vraag 11
November 2010	Vraag 11



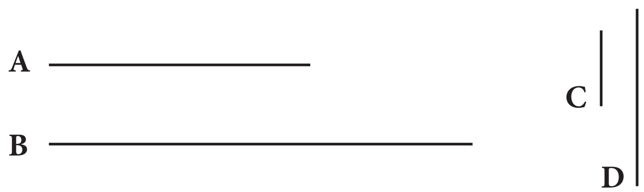
Eenheid 12

Euklidiese Meetkunde

12.1 Hersiening: Eweredigheid en oppervlakte van driehoeke

1. **Verhouding en eweredigheid**
   Verhouding vergelyk twee mates van dieselfde soort deur dieselfde eenhede te gebruik.

   Byvoorbeeld
   As Lyn A 2 eenhede lank is en Lyn B 6 eenhede lank is, dan is die verhouding van Lyn A : Lyn B gelyk aan 2 : 6.
   Dit is dieselfde verhouding as 1 : 3. Lyn C is 1 eenheid lank en Lyn D is 3 eenhede lank.
   Dus Lyn C : Lyn D is 1 : 3. Dus is C en D eweredig aan A en B.

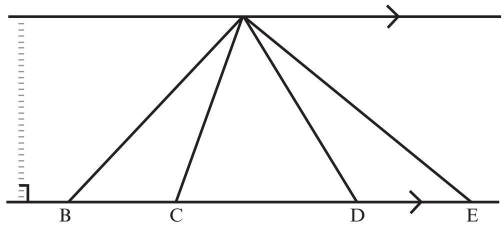


   Die twee verhoudings is dus gelyk en ons kan sê dat $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$
   Ons sê dat A, B, C en D **eweredig** is.
   Hierdie eweredigheid kan op baie maniere geskryf word:

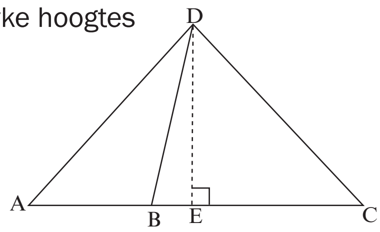
   As $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, dan 1. $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ 2. $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ 3. $\frac{C}{A} = \frac{D}{B}$

Verhouding en eweredigheid van oppervlaktes en sye van driehoeke

1. As twee of meer driehoeke ’n gemeenskaplike hoekpunt (A) het, en tussen dieselfde ewewydige lyne lê, het hulle ook ’n gemeenskaplike loodregte hoogte.



2. Die oppervlaktes van driehoeke met gelyke hoogtes is eweredig aan hulle basisse.



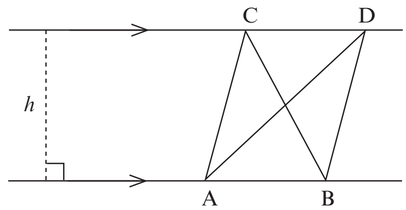
<u>Onthou:</u> **oppervlakte Δ = ½ basis x loodregte hoogte**

ΔADB, ΔDBC en ΔADC het almal dieselfde $\perp$ hoogte DE.

Dus is Oppervlakte ΔADB : Oppervlakte ΔDBC : Oppervlakte ΔADC

(½ AB $\times$ DE) : (½ BC $\times$ DE) : (½ AC $\times$ DE)   AB : BC : AC

3. As twee of meer driehoeke tussen ewewydige lyne lê, het hulle dieselfde hoogte.



4. Driehoeke op dieselfde basis (of gelyke basisse en tussen ewewydige lyne) het dieselfde oppervlakte.

Oppervlakte ΔABC = ½(AB)h

Oppervlakte ΔADB = ½(AB)h

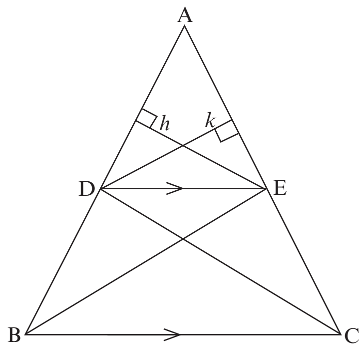
Oppervlakte ΔABC = Oppervlakte ΔADB

12.2 Eweredigheidstellings

Stelling 7 (Leer die bewys vir die eksamen)

Eweredigheidstelling

As ’n lyn ewewydig aan een sy van ’n driehoek getrek word, verdeel dit die ander twee sye eweredig.
(Eweredigheidstelling, DE || BC*)*



Gegee: Driehoek ABC met D op AB en E op AC, DE || BC

Om te bewys: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Bewys: Konstruksie: Trek hoogte h en k in ΔADE

Verbind DC en BE

$\frac{\text{Oppervlakte van } \Delta ADE}{\text{Oppervlakte van of } \Delta BDE} = \frac{½.AD.h}{½.DB.h} = \frac{AD}{DB}$ (dieselfde hoogte h)

en $\frac{\text{Oppervlakte van } \Delta\ ADE}{\text{Oppervlakte van } \Delta\ CED} = \frac{½.AE.k}{½.EC.k} = \frac{AE}{EC}$ (dieselfde hoogte k)

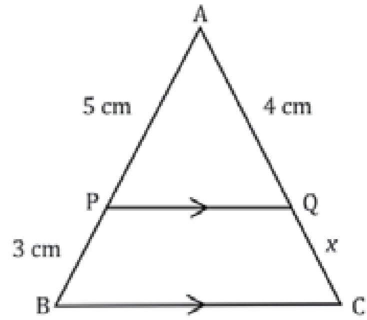
maar Oppervlakte ΔADE = Oppervlakte ΔCED (dieselfde basis DE; dieselfde hoogte; DE || BC)

$\therefore \frac{\text{Oppervlakte van } \Delta\ ADE}{\text{Oppervlakte van of } \Delta\ BDE} = \frac{\text{Oppervlakte van } \Delta\ ADE}{\text{Oppervlakte van } \Delta\ CED}$

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Oplossing van probleme deur eweredigheid te gebruik

Aktiwiteit 1



1. Bepaal die waarde van x, in die diagram hier langsaan, as PQ || BC. (4)

Oplossing

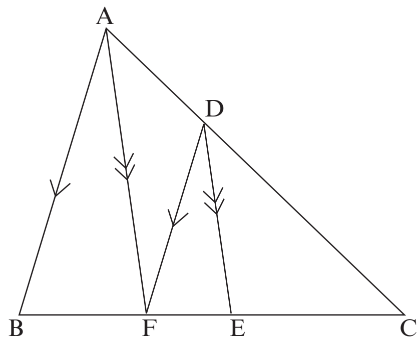
$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ✓ (PQ || BC, eweredigheidstelling) ✓

$\therefore \frac{5}{3} = \frac{4}{x}$ ✓

$\therefore 5x = (3)(4)$

$\therefore x = \frac{12}{5} = 2{,}4$ cm ✓ **[4]**

2. In ΔABC, AB || FD; AF || DE en FE : EC = 3 : 4.
Bepaal EC : BF

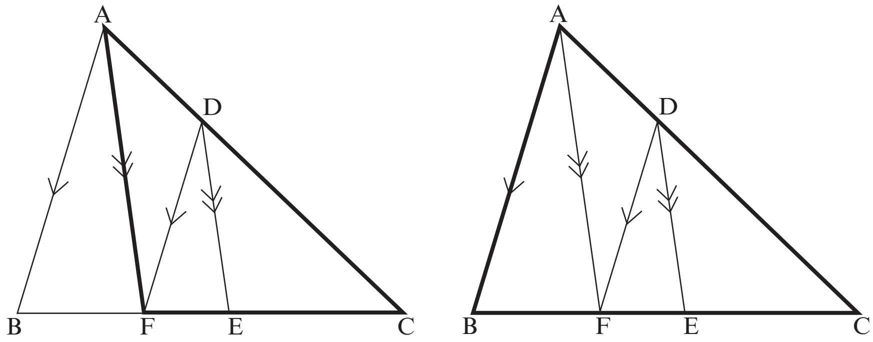


(7)

NOTA:
3 : 4 beteken nie dat FE = 3 en EC = 4 nie.
Vir enige a, kan ons sê dat FE = 3a en EC = 4a
Vir elke 3 van a in FE, is daar 4 van a in EC.

Oplossing

Werk met twee verskillende driehoeke:
ΔACF en ΔABC



In ΔACF:

$\frac{AD}{DC} = \frac{FE}{EC}$ ✓ (AF || DE, eweredigheid, afsnitstelling) ✓

In ΔABC:

$\frac{AD}{DC} = \frac{BF}{FC}$ (AB || FD, eweredigheid, afsnitstelling) ✓

$\therefore \frac{FE}{EC} = \frac{BF}{FC}$ (albei $= \frac{AD}{DC}$) ✓

$\frac{FE}{EC} = \frac{3a}{4a}$ en $\frac{BF}{FC} = \frac{BF}{7a}$

$\therefore \frac{3a}{4a} = \frac{BF}{7a}$ ✓

$\therefore$ BF $= 3\left(\frac{7a}{4}\right) = \frac{21a}{4}$ ✓

$\therefore \frac{EC}{BF} = 4a \div \frac{21a}{4}$

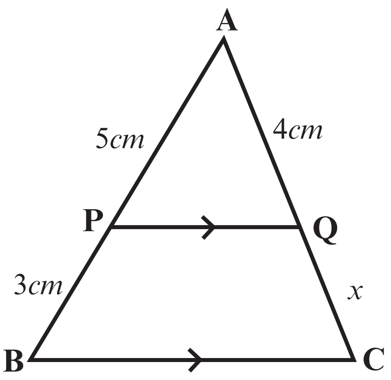
$= \frac{4a}{1} \times \frac{4}{21a}$

$= \frac{16}{21}$ ✓

$\therefore$ EC : BF = 16 : 21 **[7]**

3. Bepaal die waarde van x as PQ || BC. (4)

Oplossing



$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ ✓ (eweredigheidstelling, PQ || BC) ✓

$\frac{5}{3} = \frac{4}{x}$ ✓

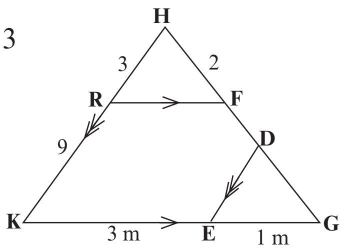
$5x = (3)(4)$

$x = \frac{12}{5} = 2{,}4\text{cm}$ ✓

[4]

4. In die diagram, RF || KG , ED || KH,
RH = 3 eenhede, RK = 9 eenhede, HF = 2 eenhede. GE: EK = 1:3

Bereken (met redes) die lengtes van GE : EK = 1 : 3
4.1 FG
4.2 FD (8)



Oplossings

4.1

In ΔHKG

$\frac{FG}{2} = \frac{9}{3}$ ✓ S (lyn || een sy van 'n Δ) ✓ R of (RF || KG)

FG = 6 eenhede ✓ S (3)

4.2 $\frac{GD}{GH} = \frac{GE}{GK} = \frac{1}{4}$ ✓ S (lyn || een sy van 'n Δ) ✓ R of (ED || KH)

$GD = \frac{1}{4}.GH$

$GD = \frac{1}{4}.(8)$ ✓ S

GD = 2 ✓ S

∴ FD = 6 − 2 = 4 eenhede ✓ R

OF

In ΔHKG, HK || DE

$\frac{GD}{DH} = \frac{EG}{EK} = \frac{1}{3}$ ✓ S

(lyn || een sy van 'n Δ) ✓ R

Of (eweredigheidstelling, HK//DE)

$\frac{6 - FD}{2 + FD} = \frac{1}{3}$ ✓ S

$18 - 3FD = 2 + FD$ ✓

∴ FD = 4 eenhede ✓ (5)

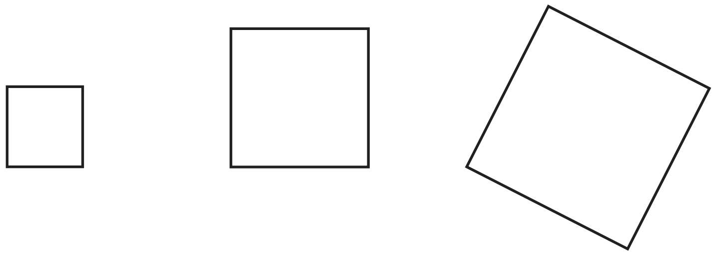
[8]

12.3 Gelykvormige veelhoeke

Gelykvormige veelhoeke het dieselfde vorm maar nie noodwendig dieselfde grootte nie.

bv. 1

Elke **vierkant** is gelyksoortig aan elke ander **vierkant**.

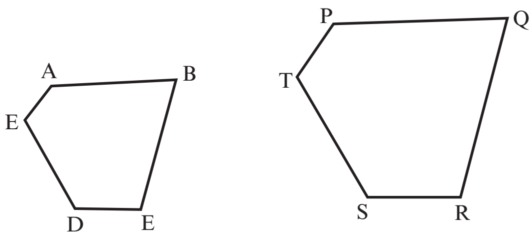


Veelhoeke (met dieselfde aantal sye) is **gelykvormig** as

- Al die pare **ooreenkomstige hoeke** gelyk is (Hulle is **gelykhoekig**) **en**
- Al die pare **ooreenkomstige sye** eweredig is.
  Albei hierdie voorwaardes moet terselfdertyd geldig wees.

||| is die simbool wat ons gebruik om te sê een veelhoek "**is gelykvormig aan**" 'n ander veelhoek.

bv. 2



Ooreenkomstige sye is sye in dieselfde posisie (met betrekking tot die hoeke) in elke veelhoek.

Beskou pentagoon ABCDE en pentagoon PQRST

$\hat{A} = \hat{P}$; $\hat{B} = \hat{Q}$; $\hat{C} = \hat{R}$; $\hat{D} = \hat{S}$; $\hat{E} = \hat{T}$

EN

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{DC}{SR} = \frac{ED}{TS} = \frac{EA}{TP}$$

$\therefore$ ABCDE ||| PQRST (gelykhoekige en ooreenstemmende sye is eweredig)

Driehoeke is spesiale veelhoeke:

- As twee driehoeke gelykhoekig is, dan sal hulle sye altyd eweredig wees, dus is die driehoeke **gelykvormig**.
- As die sye van twee driehoeke eweredig is, dan sal die driehoeke gelykhoekig wees, dus is die driehoeke **gelykvormig**.

gelykhoekige Δe $\rightarrow$ gelykvormige Δe

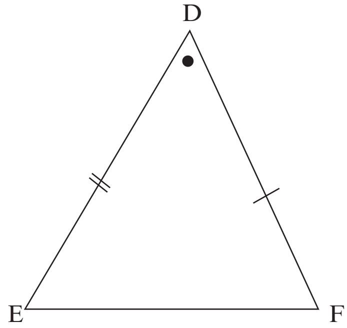
ooreenstemmende sye in Δe is eweredig $\rightarrow$ Δe is gelykvormig

Stelling 9 (Leer die bewys vir die eksamen)

As twee driehoeke gelykhoekig is, dan is die ooreenstemmende sye eweredig en daarom is die driehoeke gelykvormig.

<u>Gegee:</u> Δ ABC en Δ DEF met $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$; $= \hat{F}$

<u>Om te bewys:</u> $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$



<u>Bewys:</u> Op AB merk AP = DE en op AC merk AQ = DF af

Trek PQ

In Δ APQ en Δ DEF

AP = DE (Konstruksie)

$\hat{A} = \hat{D}$ (gegee)

AQ = DF (konstruksie)

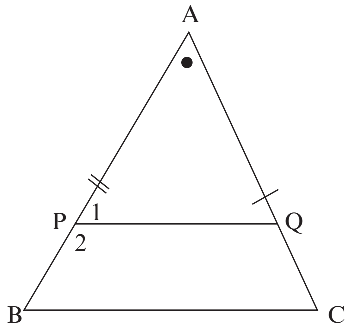
$\therefore\ \Delta APQ \equiv \Delta DEF$ (SHS)

$\therefore\ \hat{P}_1 = \hat{E}$

$\therefore\ \hat{P}_1 = \hat{B}$ $(\hat{E} = \hat{B})$

$\therefore$ PQ || BC (Ooreenstemmende $\angle$ e gelyk)

$\therefore\ \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ (PQ || BC in Δ ABC)



Maar AP = DE en AQ = DF

$\therefore\ \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$

Net so kan ons bewys dat

$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

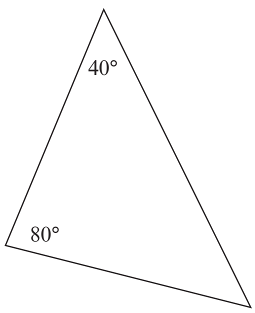
$\therefore\ \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$

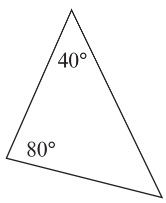
Maar die driehoeke is gelykhoekig

$\therefore\ \Delta ABC\ |||\ \Delta DEF$

NOTA:

As twee driehoeke twee ooreenkomstige hoeke het wat gelyk is, dan sal die **derde hoeke gelyk wees aan mekaar** (som van die hoeke van 'n driehoek = 180°) en die driehoeke is daarom gelykvormig en hulle sye sal eweredig wees. Die verkorte rede wat jy kan gebruik is (*derde hoek*)





As twee hoeke dieselfde is, dan is die derde hoek van albei driehoeke
180° – (40° + 80°) (som van hoeke in Δ) = 60°

Stelling 10 (Leer die bewys vir die eksamen)

As twee driehoeke se sye eweredig is, dan sal die ooreenstemmende hoeke gelyk wees en die driehoeke sal gelykvormig wees.

<u>Gegee:</u> Δ ABC en Δ DEF met $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$

<u>Om te bewys:</u> $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$; $\hat{C} = \hat{F}$

<u>Bewys:</u> Trek Δ PEF so dat $P\hat{E}F = \hat{B}$ en $E\hat{F}P = \hat{C}$

$\therefore \Delta PEF \,|||\, \Delta ABC$ (gelykhoekige Δe)

$\therefore \frac{PE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{PF}{AC}$

Maar $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$ (Gegee)

$\therefore$ PE = ED en PF = DF

En EF is gemeenskaplik

$\therefore$ DEF $\equiv \Delta$ PEF (SSS)

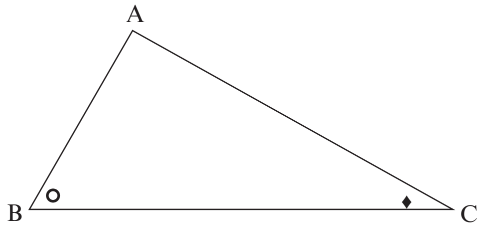
$\therefore \hat{F}_1 = \hat{F}_2 = \hat{C}$

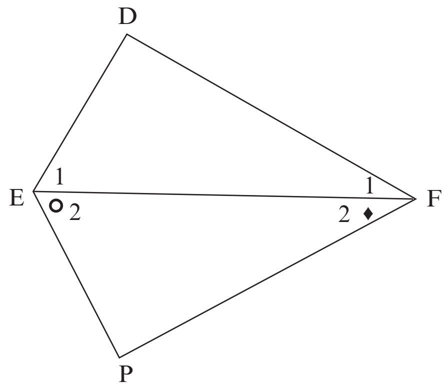
en $\hat{E}_1 = \hat{E}_2 = \hat{B}$

d.i. $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}_1$; $\hat{C} = \hat{F}_1$

Maar die ooreenstemmende sye van die driehoeke is eweredig

$\therefore \Delta ABC \,|||\, \Delta DEF$





Stelling 11 (Leer vir die eksamen)

Die Stelling van Pythagoras (bewys met gelykvormige driehoeke)

In enige reghoekige driehoek is die kwadraat van die skuinssy gelyk aan die som van die kwadrate van die ander twee sye.

Gegee: ΔABC met $\hat{A} = 90°$

Om te bewys: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Bewys: Trek AD $\perp$ BC

In ΔABD en ΔCBA

$\hat{B}$ is gemeenskaplik

$A\hat{D}B = C\hat{A}B = 90°$ (gegee)

$B\hat{A}D = B\hat{C}A$ (3de $\angle$ van Δ)

$\therefore \Delta ABD \,|||\, \Delta CBA$ (HHH)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ (ABD ||| CBA)

$\therefore AB^2 = BC \times BD$

Net so $\Delta ACD \,|||\, \Delta CBA$

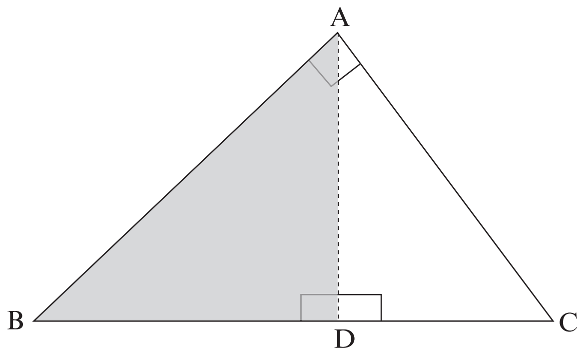
en $AC^2 = DC \times CB$

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC \times BD + DC \times CB$

$AB^2 + AC^2 = BC\,(BD + DC)$

$AB^2 + AC^2 = BC \times BC$

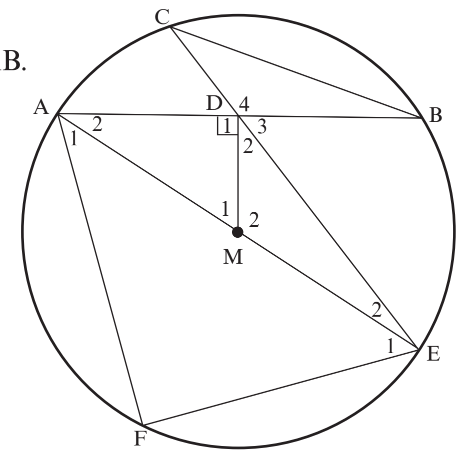
$AB^2 + AC^2 = BC^2$



Aktiwiteit 2

1.

Diameter AME van sirkel met middelpunt M halveer $F\hat{A}B$.
MD is loodreg op die koord AB.
ED verleng ontmoet die sirkel by C en CB word verbind.



a) Bewys $\Delta AEF \,|||\, \Delta AMD$ (5)

b) Bepaal gevolglik die numeriese waarde van $\frac{AF}{AD}$. (5)

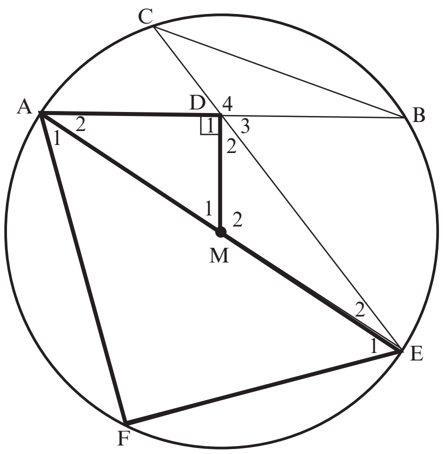
c) Bewys $\Delta CDB \,|||\, \Delta ADE$ (4)

d) Bewys $AD^2 = CD.\,DE$ (3)

[17]

Oplossing

a)



$\hat{F} = 90°$ ($\angle$ in halfsirkel) ✓

$\hat{D}_1 = 90°$ (gegee $MD \perp AB$) ✓

$\therefore \hat{F} = \hat{D}_1$

In ΔAEF en ΔAMD

$\hat{F} = \hat{D}_1$ ✓ (bewys)

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (AM halveer $F\hat{A}B$) ✓

$\therefore \hat{E}_1 = \hat{M}_1$ (derde $\angle$ van Δ)

$\therefore \Delta AEF \,|||\, \Delta AMD$ (HHH) of $\angle\angle\angle$ ✓ (5)

Oplossing

b) $\frac{AE}{AM} = \frac{EF}{MD} = \frac{AF}{AD}$ ($|||\ \Delta$e) ✓

$AM = ME$ (radiusse) ✓

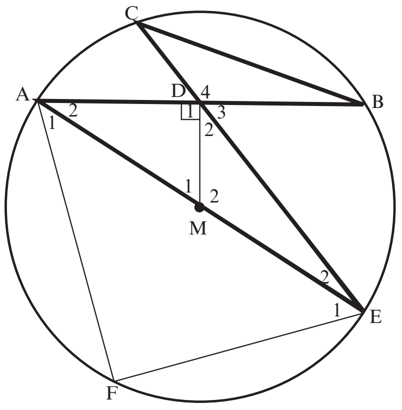
$\therefore AE = 2AM$ ✓

$\therefore \frac{2AM}{AM} = \frac{AF}{AD}$ ✓

$\therefore \frac{AF}{AD} = 2$ ✓ (5)

Oplossing

c)



In ΔCDB en ΔADE

$\hat{C} = \hat{A}_2$ ✓ (∠e in dieselfde segment) ✓

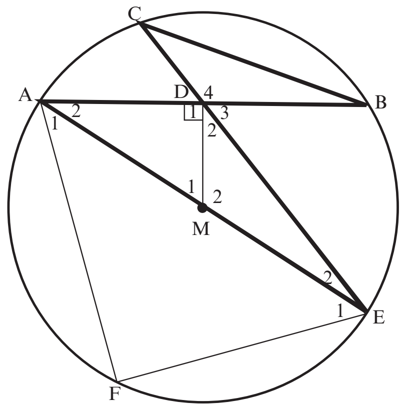
$\hat{B} = \hat{E}_2$ (∠e in dieselfde segment) ✓

$\hat{D}_4 = \hat{D}_1 + \hat{D}_2$ (teenoorst ∠)

$\therefore \Delta CDB \,|||\, \Delta ADE$ (HHH) ✓ (4)

Oplossing

d)



$\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{DE}$ (III Δe)

$\therefore$ CD. DE = AD. DB ✓

Maar AD = DB (MD ⊥ AB, M is die middelpunt) ✓

$\therefore$ CD. DE = AD ✓

$\therefore$ AD^2 = CD. DE (3)

[17]

2.

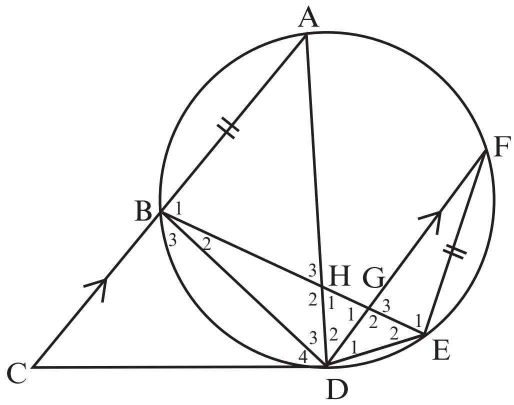
CD is 'n raaklyn aan sirkel ABDEF by D. Koord AB word verleng na C. Koord BE sny koord AD in H en koord FD in G. AC || FD en FE = AB.

a) Bewys dat $\hat{D}_4 = \hat{D}_2$ (3)

b) Bewys dat ΔBHD ||| ΔFED (5)

c) Gevolglik $\frac{AB}{BH} = \frac{FD}{BD}$ (3)

[11]

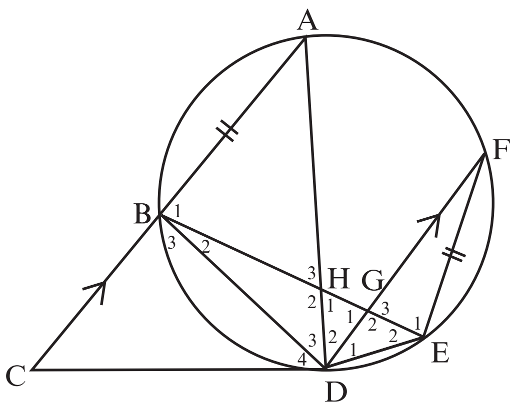


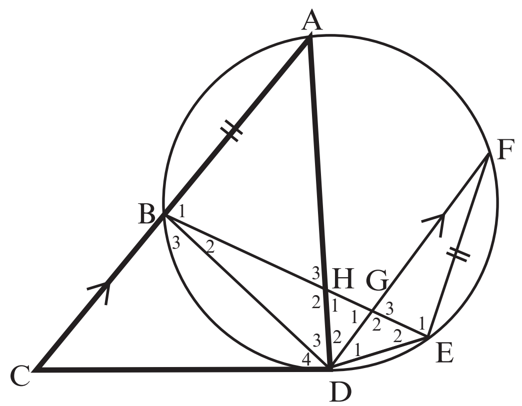
Oplossings

a) $\hat{A} = \hat{D}_4$ (raaklyn-koord stelling) ✓

$\hat{D}_2 = \hat{A}$ (verw ∠e CA || DF) ✓

$\hat{D}_4 = \hat{D}_2$ ✓ (3)





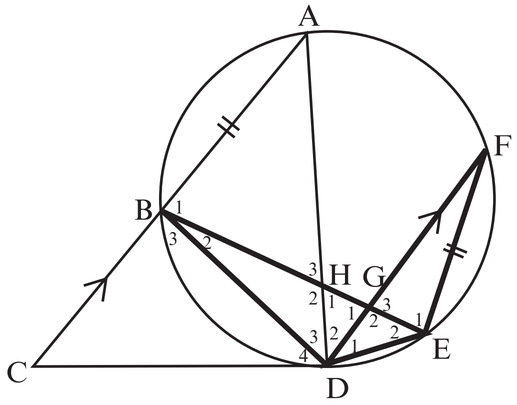
b) In ΔBHD en ΔFED

$\hat{B}_2 = \hat{F}$ (∠e in dieselfde segment) ✓

$\hat{D}_3 = \hat{D}_1$ ✓ (gelyke koorde) ✓

$\hat{H}_2 = \hat{E}_2$ (derde ∠ van Δ) ✓

∴ ΔBHD ||| ΔFED ∠∠∠ ✓ (5)



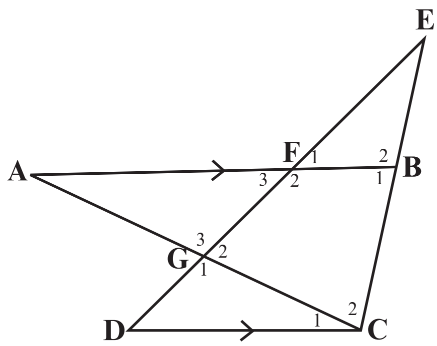
c) $\frac{FE}{BH} = \frac{FD}{BD}$ ✓ (||| Δe)

Maar FE = AB ✓ (gegee)

∴ $\frac{AB}{BH} = \frac{FD}{BD}$ ✓ (3)

[11]

3. In die diagram is ΔABC sodanig dat F op AB is en G op AC is. CB word verleng en ontmoet GF verleng by E. DGFE is 'n reguitlyn. BFA || CD.
AB = 20, BC = 10, EF = 8, EB = 5 en FB = 6.



3.1	Bepaal die numeriese waarde van $\frac{EF}{ED}$	(3)
3.2	Bereken die lengte van ED	(2)
3.3	Voltooi, sonder om die redes te gee: $\Delta EFB \parallel\!| \Delta$ ….	(1)
3.4	Gevolglik, bereken die lengte van DC	(3)
3.5	Bewys dat: $\frac{AF}{CD} = \frac{FG}{DG}$	(4)
		[13]

Oplossings

BFA || CD. AB = 20, BC = 10, EF = 8, EB = 5 en FB = 6

3.1

FB ll CD (Gegee)

$\frac{EF}{ED} = \frac{EB}{EC}$ ✓ **S** (lyn || een sy van A) ✓ **R**

$\frac{EF}{ED} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ✓ S (3)

3.2 $\frac{EF}{ED} = \frac{1}{3}$ uit 3.1 en EF = 8

$\therefore \frac{8}{ED} = \frac{1}{3}$ ✓

ED = 24 ✓ **S** (2)

3.3 $\Delta EFB \parallel\!| \Delta EDC$ ✓ (1)

3.4 $\frac{DC}{FB} = \frac{ED}{EF}$ ($\Delta EFB \parallel\!| \Delta EDC$) ✓ **R**

$\frac{DC}{6} = \frac{24}{8}$ ✓ **S**

DC = 18 ✓ **S** (3)

3.5 In ΔAFG en ΔCDG

$\hat{A} = \hat{C}_1$ (verw ∠e. AF || DC) ✓ **S/R**

$\hat{G}_3 = \hat{G}_1$ (regoorstaande ∠e) ✓ **S/R**

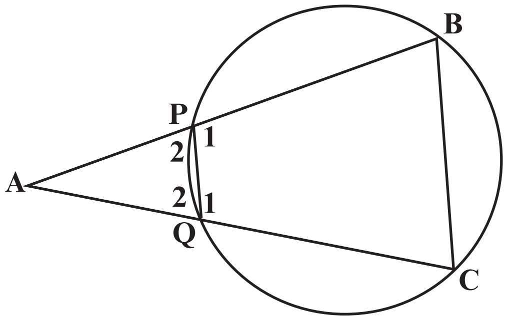
$\hat{F}_3 = \hat{D}$ (verw ∠e. AF || DC)

ΔAFG III ΔCDG (∠∠∠) ✓ **R**

$\frac{AF}{CD} = \frac{FG}{DG}$ ($\Delta AFG \parallel\!| \Delta CDG$) ✓ **R** (4)

[13]

4. In die diagram is PQCB 'n sikliese vierhoek. Koord BP en CQ word verleng om by A te ontmoet sodat AQ = BC.



4.1 Bewys dat: $\Delta APQ \ ||| \ \Delta ACB$ (4)

4.2 Bewys gevolglik dat: $AQ^2 = AB.PQ$ (3)

[7]

Oplossings

4.1

Bewys: In ΔAPQ en ΔACB

$\hat{A} = \hat{A}$ (gemeenskaplik) ✓ **S/R**

$\hat{P}_2 = \hat{C}$ ✓ **S** (buite $\angle$ van 'n sikliese vierhoek) ✓ **R**

$\hat{P}_2 = \hat{B}$ (som $\angle$e van Δ) of (buite $\angle$ van sikliese vierhoek)

$\Delta APQ \ ||| \ \Delta ACB$ ($\angle.\angle.\angle$) ✓ **R** (4)

4.2

$\frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{BC}$ ✓ **S** ($\Delta APQ \ ||| \ \Delta ACB$) ✓ **S**

$\frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{AQ}$ ✓ **S** (AQ = BC)

$AQ^2 = AB.PQ$ (3)

[7]

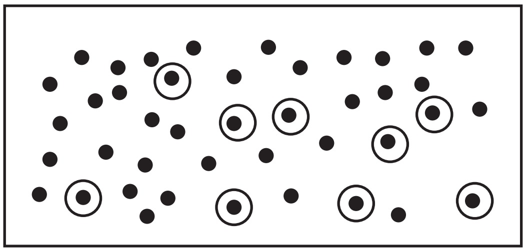
13 Eenheid

Statistiek

Datahantering is die studie van statistiek, of data. Ons versamel, organiseer, ontleed en interpreteer data. Die data kan inligting verskaf aan studente, navorsers, adverteerders en besighede.

Dit verskaf aan ons 'n begrip van maatskaplike kwessies en menslike tendense. Dan kan ons ingeligte besluite neem wanneer ons vir die toekoms beplan of 'n nuwe advertensie maak, of maatskaplike kwessies takel.

Ons versamel data gewoonlik van 'n redelike klein groep (wat die **steekproef** genoem word). Die steekproef moet groot genoeg wees en dit moet ewekansig uit die populasie gekies word. Dit is om seker te maak dat dit 'n regverdige verteenwoordiging is van die tendense in die groter groep mense (wat die **populasie** genoem word).



Populasie

wenk

Steekproef:

Etlike data wat ewekansig uit die populasie gekies word.

13.1 Staafgrafieke en frekwensietabelle

Data kan voorgestel word met 'n frekwensietabel of met 'n staafgrafiek. Elke staaf verteenwoordig 'n groep data en die stawe kan met mekaar vergelyk word. Die een as van die staafgrafieke moet benoem word en die ander as moet genommer word.

bv. 1

In 'n Geografieklas het 23 leerders 'n toets uit 10 geskryf. Hier is 'n lys van hulle punte:

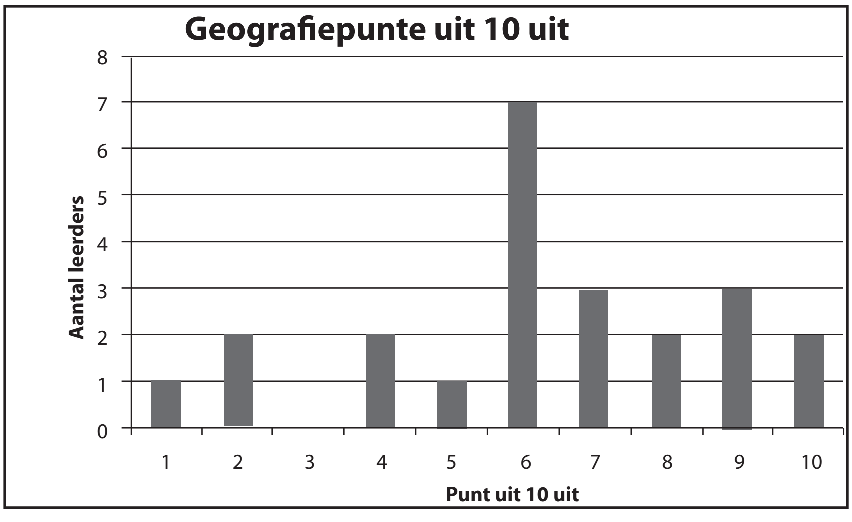
4; 1; 2; 2; 6; 9; 6; 10; 6; 8; 9; 6; 7; 7; 8; 4; 6; 6; 5; 7; 9; 10; 6.

Ons kan 'n frekwensietabel gebruik om hierdie data op te teken.

Frekwensietabel

Punt uit 10 uit	Telmerke	Aantal leerders wat hierdie punt gekry het (frekwensie)
1	/	1
2	//	2
3		0
4	//	2
5	/	1
6	//// //	7
7	///	3
8	//	2
9	///	3
10	//	2

Ons kan ook 'n staafgrafiek maak om hierdie data aan te toon. Gebruik die punte van 1 tot 10 op die horisontale as. Gebruik die aantal leerders wat daardie punt gekry het op die vertikale as. Die aantal leerders is die frekwensie.



13.2 Mate van sentrale neiging

13.2.1 Ongegroepeerde data

Mate van sentrale neiging is verskillende maatstawwe wat gebruik word om die "middel" of "gemiddelde" van 'n stel data te bepaal. Die drie soorte "middel" van 'n stel data wat ons gebruik, word die gemiddelde, die mediaan en die modus genoem.

Dit is goed om te begin deur die stel data in toenemende volgorde te rangskik voordat ons met die vrae begin.

1. **Gemiddelde**

   Die **gemiddelde** van die data is die gemiddeld wanneer jy al die waardes optel en dit deur die aantal waardes deel. Ons gebruik die simbool ($\bar{x}$) vir die gemiddelde

Gemiddelde $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fx}{n}$

In die eksamen sal hierdie formule op die inligtingsblad gegee word.

bv. 2

In 'n Wiskundeklas het 23 leerders 'n toets uit 25 geskryf. Hier is 'n lys van hulle punte:

14; 10; 23; 21; 11; 19; 13; 11; 20; 21; 9; 11; 17; 17; 18; 14; 19; 11; 24; 21; 9; 16; 6.

Bereken die gemiddelde van hierdie data.

Oplossing

Gemiddelde $(\bar{x}) = \frac{\text{som van die waardes in stel}}{\text{aantal waardes in stel}}$

$= \frac{14 + 10 + 23 + 21 + 11 + 19 + 13 + 11 + 20 + 21 + 9 + 11 + 17 + 17 + 18 + 14 + 19 + 11 + 24 + 21 + 9 + 16 + 6}{23}$ ✓

$= 15,4347\ldots$ ✓ (2)

2. **Mediaan**
   Die **mediaan** is die middelste getal in 'n geordende stel data.

bv. 3

In 'n Wiskundeklas het 23 leerders 'n toets uit 25 geskryf. Hier is 'n lys van hulle punte:

14; 10; 23; 21; 11; 19; 13; 13; 20; 21; 9; 13; 17; 17; 18; 14; 19; 13; 24; 21; 9; 16; 6.

Bereken die mediaan van hierdie data.

Oplossing

- Rangskik eers die data in volgorde van die laagste tot die hoogste.

  6; 9; 9; 10; 11; 13; 13; 13; 13; 14; 14; **16;** 17; 17; 18; 19; 19; 20; 21; 21; 21; 23; 24.

  Daar is 23 getalle, so die middelste getal is die 12de getal uit 23 getalle. Dus is 16 die mediaan, die getal in die middel van die data.
- Wanneer daar 'n ewe aantal waardes in die stel data is, lê die mediaan halfpad tussen die middelste twee waardes.
- Ons kan hierdie twee waardes optel en deur 2 deel. Byvoorbeeld, wat as nog 'n leerder die toets geskryf het en haar punt was 7? Ons kan dit by die geordende stel data voeg.

  6; $\boxed{\textbf{7;}}$ 9; 9; 10; 11; 13; 13; 13; 13; 14; **14; 16;** 17; 17; 18; 19; 19; 20; 21; 21; 21; 23; 24.

  Nou is daar 24 getalle en die middelste twee getalle is die 12de en 13de getalle. Die middelste twee getalle is 14 en 16. Tel 14 en 16 bymekaar om 30 te kry en deel dit deur 2 om 'n mediaan van 15 te kry.

  $\frac{14+16}{2} = 15$

3. **Modus**
   Die **modus** is die getal of waarde wat die meeste in die stel data voorkom.

bv. 4

In 'n Wiskundeklas het 23 leerders 'n toets uit 25 geskryf. Hier is 'n lys van hulle punte:

14; 10; 23; 21; 11; 19; 13; 13; 20; 21; 9; 13; 17; 17; 18; 14; 19; 13; 24; 21; 9; 16; 6.

Bepaal die **modus** van hierdie data.

Oplossing

Die modus van die punte van die toets is **13**✓ (13 kom 4 keer voor). (1)

Opsomming

gemiddelde $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fx}{n}$

mediaan: middelste telling van 'n geordende stel data

modus: die telling wat die meeste voorkom

Aktiwiteit 1

Die tabel hieronder verteenwoordig Wiskundetoetspunte en die frekwensie vir elke punt.

Punte (x)	**Frekwensie (f)**
13	5
17	6
20	4
25	10

(a) Bepaal die mediaan (2)

(b) Bepaal die gemiddelde (2)

[4]

Oplossings

(a) $\sum f = 25$ ✓ d.i. daar is 25 punte. Om die mediaan te bepaal, word die posisie van die mediaan bepaal deur die frekwensies op te tel tot by die posisie van die mediaan.

Die mediaan lê in posisie 13,
gevolglik is die mediaan = 20 ✓ (2)

(b) gemiddelde $= \frac{5(13) + 6(17) + 4(20) + (10)23}{25} = \frac{477}{25} = 19{,}08$ ✓✓ (2)

[4]

13.2.2 Gegroepeerde data

bv. 5

Vyftig kopers is gevra watter persentasie van hulle inkomste hulle aan kruideniersware spandeer.

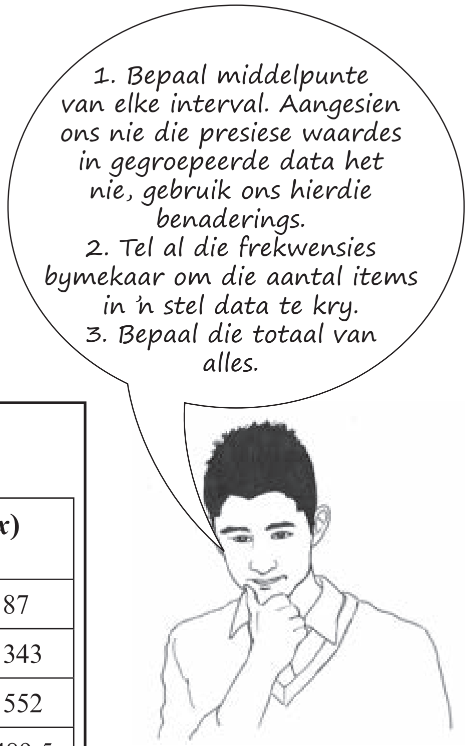
Ses het gesê tussen 10% en 19%, alles ingesluit. Die volledige stel response word in die tabel hieronder gegee.

PERSENTASIE	FREKWENSIE (f)
$10 < x \leq 19$	6
$20 < x \leq 29$	14
$30 < x \leq 39$	16
$40 < x \leq 49$	11
$50 < x \leq 59$	3

(a) Bereken die gemiddelde persentasie van gesinsinkomste wat aan kruideniersware spandeer word.

(b) In watter interval lê die mediaan?

(c) Bepaal die modus persentasie van inkomste wat aan kruideniersware spandeer word.



Oplossings

(a)

PERSENTASIE	Middelpunt Interval	Frekwensie f	Totaal (fx)
$10 < x \leq 19$	14,5	6	$14{,}5 \times 6 = 87$
$20 < x \leq 29$	24,5	14	$24{,}5 \times 14 = 343$
$30 < x \leq 39$	34,5	16	$34{,}5 \times 16 = 552$
$40 < x \leq 49$	44,5	11	$44{,}5 \times 11 = 489{,}5$
$50 < x \leq 59$	54,5	3	$54{,}5 \times 3 = 163{,}5$
Som		n=50	$\Sigma(fx) = 1635$ ✓

Gemiddelde $= \frac{\Sigma fx}{50} = 32{,}7$ ✓ (2)

(b) $30 < x \leq 39$ ✓ (mediaan is in posisie 25,5 van die data. Wanneer ons die frekwensies hierbo bymekaar tel, dan lê posisie 25,5 in die interval $30 < x \leq 39$) (1)

(c) $30 < x \leq 39$ ✓ (die interval met die hoogste frekwensie) (1)

wenk

Daar is 50 tellings. Die mediaan lê tussen posisie 25 en 26.

6+14=20

20+16=36

13.3 Mate van verspreiding (of uitbreiding)

Die **mate van verspreiding** gee vir ons inligting oor hoe verspreid die data rondom die mediaan is. Die mate van sentrale neiging gee vir ons inligting oor die sentrale punt van die data, maar ons moet steeds weet of die data op een plek gekonsentreerd is, en of dit egalig verspreid is.

Ons kyk eerstens na hierdie mate van verspreiding: **variasiewydte** en **interkwartielvariasiewydte**.

1. **Variasiewydte**
   Die **variasiewydte** is die verskil tussen die hoogste waarde (of maksimum) en die laagste waarde (of minimum) in 'n stel data.

Variasiewydte = grootste waarde in die stel data – kleinste waarde in die stel data

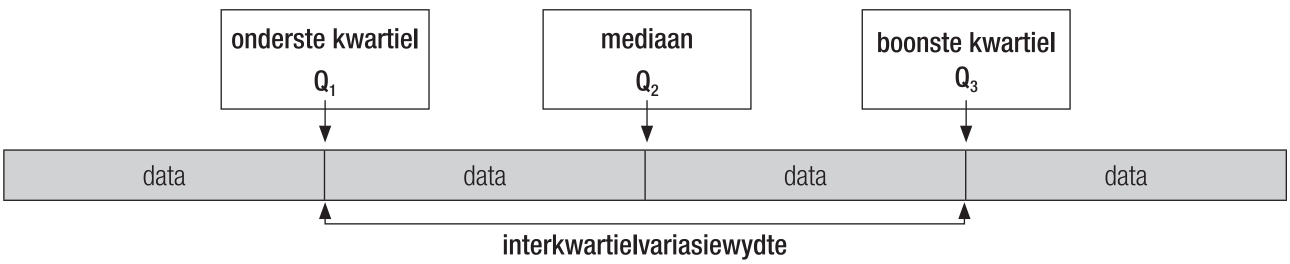
bv. 6

Bepaal die variasiewydte van die Wiskundetoetspunte:
6; 9; 9; 10; 11; 13; 13; 13; 13; 14; 14; 16; 17; 17; 18; 19; 19; 20; 21; 21; 21; 23; 24.

Oplossing
24 – 6 = 18. Dus is die variasiewydte van die punte 18.

2. **Die interkwartielvariasiewydte**

- Die interkwartielvariasiewydte hang af van die mediaan. Rangskik dus eers die data en bepaal die mediaan.
- Die data word in vier dele verdeel (kwarte, wat ons kwartiele noem). Die mediaan (Q_2) verdeel eerstens die data in twee halwes.
- Die onderste kwartiel (Q_1) verdeel die data onder die mediaan (Q_2) in twee gelyke stelle data.
- Die boonste kwartiel (Q_3) verdeel die data bokant die mediaan in twee gelyke stelle data.
- Die verskil tussen die onderste en boonste kwartiel ($Q_3 - Q_1$) word die **interkwartielvariasiewydte** genoem. Dit sê vir ons hoe die middelste helfte van die data rondom die mediaan versprei is.



bv. 7

Bepaal die interkwartielvariasiewydte van die Wiskundetoetspunte:

6; 9; 9; 10; 11; 13; 13; 13; 13; 14; 14; 16; 17; 17; 18; 19; 19; 20; 21; 21; 21; 23; 24.

Oplossing

- Ons weet reeds dat die mediaan 16 is.
- Die onderste helfte van die data het 11 tellings, dus is Q_1 die 6de data-item. $\therefore Q_1 = 13$
- Die boonste helfte van die stel data het 11 tellings, dus is Q_3 die 6de telling van die boonste helfte van die stel data. $\therefore Q_3 = 20$

onderste kwartiel Q_1	mediaan Q_2	boonste kwartiel Q_3

6; 9; 9; 10; 11; 13; 13; 13; 13; 14; 14; 16; 17; 17; 18; 19; 19; 20; 21; 21; 21; 23; 24

interkwartielvariasiewydte = $Q_3 - Q_1$ = 20 – 13 = 7 **[8]**

NB

Die mediaan is nie ingesluit in die onderste helfte en boonste helfte van die data wanneer Q_1 en Q_3 bereken word nie.

Aktiwiteit 2

As die toetspunte in 'n ander klas deur die data hieronder voorgestel word, bepaal die interkwartielvariasiewydte van die toetspunte:

6; 7; 9; 9; 10; 11; 13; 13; 13; 13; 14; **14; 16;** 17; 17; 18; 19; 19; 20; 21; 21; 21; 23; 24. **[8]**

Oplossing

Ons weet reeds dat die middelste twee getalle 14 en 16 is.

- Die stel data het 'n ewe aantal punte, dus sal die mediaan tussen 14 en 16 lê. (✓). Gebruik die onderste waarde 14 in die onderste helfte en die boonste waarde 16 in die boonste helfte. (✓)
- Onderste helfte: 12 getalle, gebruik dus die 6de en 7de getalle om die onderste kwartiel te bepaal $\frac{11 + 13}{2} = 12$ (✓)
- Boonste helfte: 12 getalle, gebruik dus die 6de en 7de getalle om die boonste kwartiel te bepaal. $\frac{19 + 20}{2} = 19{,}5$ (✓)

onderste kwartiel Q_1 ✓	mediaan Q_2 ✓	boonste kwartiel Q_3 ✓

6; 7; 9; 9; 10; **11;13;** 13; 13; 13; 14; 14; 16; 17; 17; 18; 19; **19; 20;** 21; 21; 21; 23; 24

interkwartielvariasiewydte = 19,5 – 12 = 7,5 ✓ **[8]**

13.4 Vyfgetalopsomming en mond-en-snordiagramme

1. Vyfgetalopsomming

Die vyfgetalopsomming is 'n "opsommende" beskrywing van 'n stel data. Dit bestaan uit hierdie vyf getalle:

- die minimumwaarde
- die onderste kwartiel
- die mediaan
- die boonste kwartiel
- die maksimumwaarde

bv. 8

Wat is die vyfgetalopsomming vir die stel data wat ons tot dusver gebruik het?

6; 9; 9; 10; 11; 13; 13; 13; 13; 14; 14; 16; 17; 17; 18; 19; 19; 20; 21; 21; 21; 23; 24.

– die minimumwaarde:	6
– die onderste kwartiel:	13
– die mediaan:	16
– die boonste kwartiel:	20
– die maksimumwaarde:	24

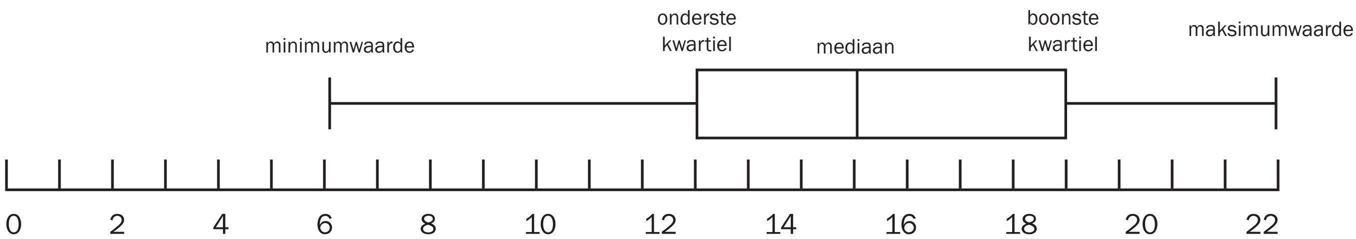
2. Mond-en-snordiagram

Ons kan die vyfgetalopsomming op 'n **mond-en-snordiagram** voorstel.

Die mond verteenwoordig die **middelste helfte** van die data (die interkwartielvariasiewydte)

Die lyn in die mond toon die **mediaan** aan.

Die "snorre" toon die minimum- en **maksimumwaardes** aan.



Kwartiele verdeel data in vier gelyke stelle data. Die langer mond-en-snor beteken dat die onderste 50% van die tellings meer verspreid is as die boonste 50%.

Skeefgetrek na regs (positief skeefgetrek) beteken dat die boonste helfte van die data meer verspreid is as die onderste helfte.

Skeefgetrekte data

'n **Mond-en-snordiagram** kan wys of 'n stel data simmetries, positief skeefgetrek of negatief skeefgetrek is. Hierdie mond-en-snordiagram is nie simmetries nie want die snorre is nie almal ewe lank nie en die mediaan is nie in die middel van die mond nie. Die snor aan die linkerkant is 'n bietjie langer as die snor aan die regterkant, wat wys dat die data aan die linkerkant van die mond meer verspreid is. Die mond is ook langer aan die regterkant van die mediaan as aan die linkerkant van die mediaan. Ons sê dat die data **negatief skeefgetrek** is. (of skeefgetrek na links).

3. Identifisering van uitskieters

bv. 9

Bepaal of die minimum in Voorbeeld 8 'n uitskieter is of nie.

Oplossing

Interkwartielvariasiewydte $= Q_3 - Q_1$

$= 20 - 13$

$= 7$

$Q_1 - 1{,}5 \times \text{IQR} = 13 - 1{,}5 \times 7$

$= 2{,}5$

$6 > 2{,}5 \therefore 6$ is nie 'n uitskieter nie

wenk

Om uitskieters te bepaal:

- Bepaal die interkwartielvariasiewydte
- Bepaal $Q_1 - 1{,}5 \times \text{IQR}$
- As die minimum $<$ as die waarde van $Q_1 - 1{,}5 \times \text{IQR}$, dan is dit 'n uitskieter.
- Bepaal $Q_3 - 1{,}5 \times \text{IQR}$
- As die maksimum $> Q_3 - 1{,}5 \times \text{IQR}$, dan is dit 'n uitskieter.

Aktiwiteit 3

1. Hierdie is die punte van tien leerders in 'n Wetenskaptoets:
90; 85; 10; 75; 70; 60; 78; 80; 82; 80; 55; 84

a) Teken 'n mond-en-snordiagram vir die gegewe data. (5)
b) Bepaal die interkwartielvariasiewydte. (2)
c) Sê of die data skeefgetrek is of nie. (1)
d) Sê of 10 'n uitskieter is of nie. (2)

[10]

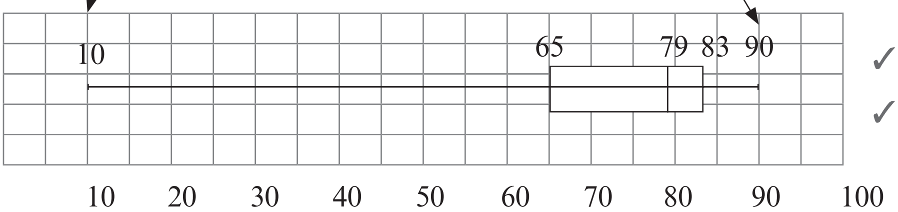
Oplossings

a) Skryf eers al die tellings in toenemende volgorde neer.
10; 55; 60; 70; 75; 78; 80; 80; 82; 84; 85; 90
Werk die vyfgetalopsomming uit
Minimumwaarde: 10
Maksimumwaarde: 90
Mediaan: 12 getalle, gebruik dus die 6de en 7de getalle $\frac{78+80}{2} = 79$
Onderste kwartiel: Gebruik die eerste 6 getalle. Die 3de en 4de getalle is 60 en 70.
Boonste kwartiel: Gebruik die laaste 6 getalle. Die 3de en 4de getalle is 82 en 84.

65✓ 79✓ 83✓

10; 55; 60; | 70; 75; 78; | 80; 80; 82; | 84; 85; 90

$\frac{60+70}{2}$ $\frac{78+80}{2}$ $\frac{82+84}{2}$



✓ snorre
✓ mond
(5)

b) Interkwartielvariasiewydte = boonste kwartiel – onderste kwartiel ✓ = 83 – 65 = 18✓ (2)

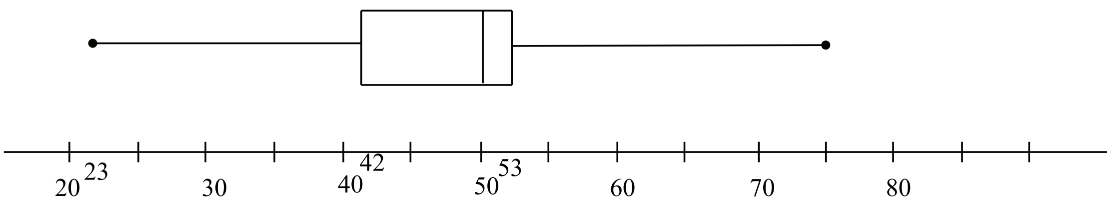
c) Die data is skeefgetrek na links (negatief skeefgetrek) ✓ (1)
Die snor aan die linkerkant is langer, d.i. die lengte aan die linkerkant van die mond is langer as die lengte aan die regterkant.

d) Interkwartielvariasiewydte (IQR) $= Q_3 - Q_1$
$= 83 - 65$
$= 18$
$Q1 - 1{,}5 \times IQR = 65 - 1{,}5 \times 18$
$= 38$ ✓38
$10 < 38$ ✓ gevolgtrekking
$\therefore$ 10 is 'n uitskieter (2)

[10]

Aktiwiteit 4

Die vyfgetalopsomming van die lengtes van bome drie maande nadat dit geplant is, is (23 ; 42 ; 50 ; 53 ; 75). Hierdie inligting word in die mond-en-snordiagram hieronder voorgestel.



a) Bepaal die interkwartielvariasiewydte. (2)

b) Watter persentasie van die bome het 'n lengte van meer as 53 cm? (2)

c) Tussen watter kwartiele het die lengtes van die bome die kleinste variasie? Verduidelik? (2)

[6]

Oplossings

a) Interkwartielvariasiewydte = 53 – 42 ✓ = 11 ✓ (2)

b) 25% ✓✓ (2)

c) Tussen Q_2 (50) en Q_3 (53) ✓ Die afstand tussen hierdie twee kwartiele is die kleinste. ✓ (2)

[6]

13.5 Histogramme en frekwensieveelhoeke

- Histogramme en frekwensieveelhoeke is grafieke wat gebruik word om gegroepeerde en kontinue data voor te stel. Hulle toon die frekwensie en die verspreiding van die data aan.
- **Kontinue data** is data wat nie net in telgetalle gemeet word nie. Byvoorbeeld, lengte, massa, volume of tyd word in kontinue hoeveelhede gemeet.
- Die horisontale as van 'n histogram en 'n frekwensieveelhoek het 'n kontinue skaal.
- Die vertikale as toon die **frekwensie**, of aantal kere wat die data gelys is.

1. Gegroepeerde data

In plaas daarvan om elke stukkie data apart op te teken, kan ons die data groepeer om dit makliker te maak om te lees. Gegroepeerde data kan op 'n histogram of 'n frekwensieveelhoek voorgestel word.

bv. 10

'n Winkelier wil die massa van elke pakkie hoenderporsies wat hy verkoop, opteken. Hy groepeer die massas in intervalle van 0,2 kg. Hy maak 'n frekwensietabel.

Massa van hoender in kg	Aantal
0,8 < massa van hoender ≤ 1,0	0
1,0 < massa van hoender ≤ 1,2	3
1,2 < massa van hoender ≤ 1,4	8
1,4 < massa van hoender ≤ 1,6	6
1,6 < massa van hoender ≤ 1,8	2
1,8 < massa van hoender ≤ 2,0	1
2,0 < massa van hoender ≤ 2,2	0

Hierdie 8 pakkies het enige massa tussen 'n bietjie meer as 1,2 kg en 1,4 kg

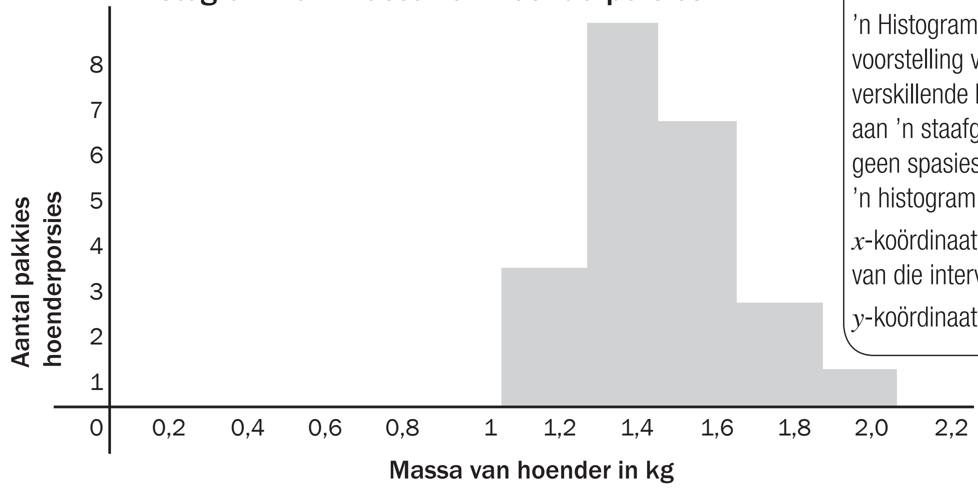
Dus 1,2 < massa van hoender ≤ 1,4

2. Histogramme

Uit die frekwensietabel teken hy 'n histogram.

Histogram van massa van hoenderporsies

Gebruik vertikale as vir frekwensie



Gebruik horisontale as vir massa.
Gebruik intervalle van 0,2 kg

'n Histogram is 'n grafiese voorstelling van data met stawe van verskillende lengtes. Dit is soortgelyk aan 'n staafgrafiek maar daar is geen spasies tussen die stawe van 'n histogram nie.

x-koördinaat: gebruik boonste limiet van die interval

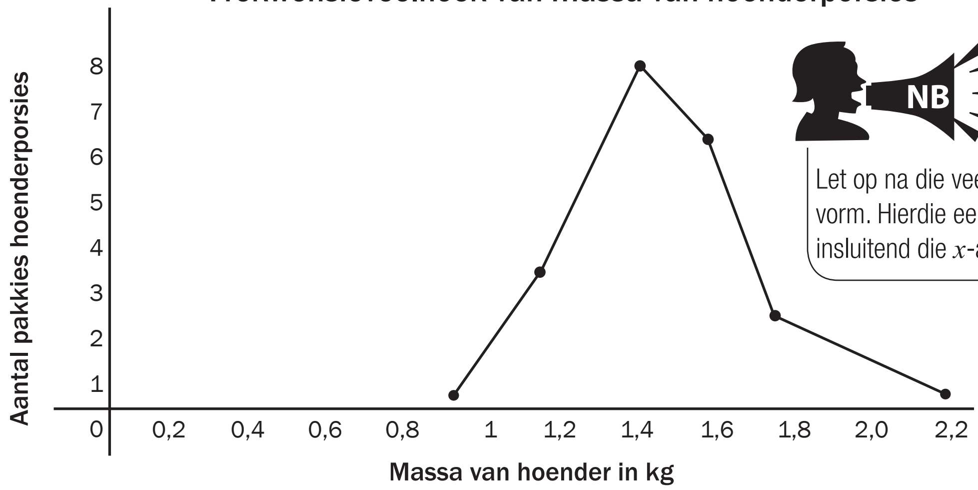
y-koördinaat: frekwensie

3. Frekwensieveelhoeke

Ons kan ook 'n **frekwensieveelhoek** met hierdie data maak. 'n Frekwensieveelhoek gebruik lyne om die middelpunte van elke interval te verbind. Die veelhoek moet op die horisontale as begin en eindig. Ons kan dus 'n interval by die begin en die einde van die data byvoeg wat albei 'n frekwensie van 0 het.

Frekwensieveelhoek van massa van hoenderporsies

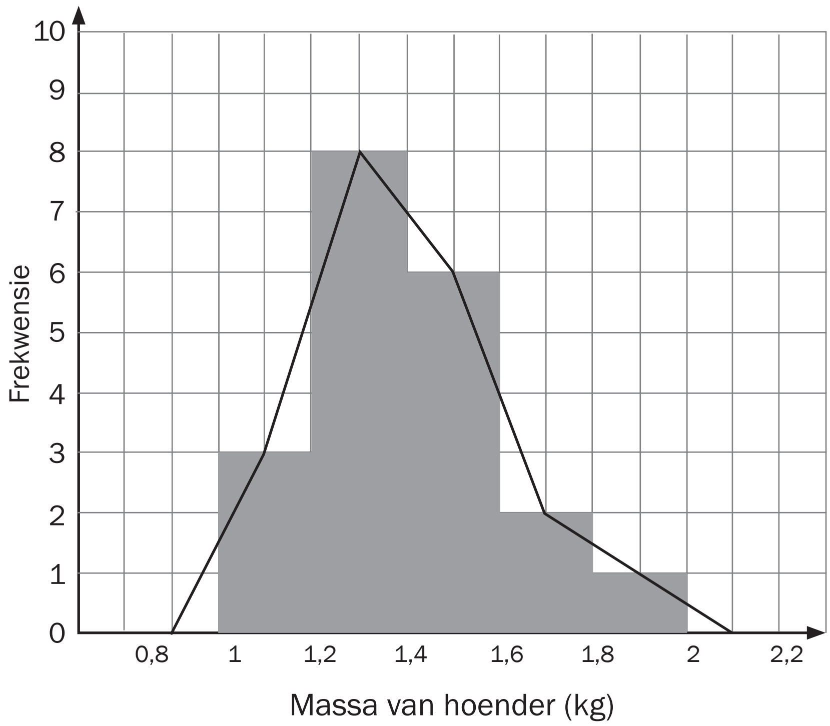
Gebruik vertikale as vir frekwensie



Gebruik horisontale as vir massa
Gebruik intervalle van 0,2 kg

Let op na die veelhoek se vorm. Hierdie een het 6 sye, insluitend die x-as.

Die frekwensieveelhoek kan ook geteken word met die middelpunte van die stawe van die histogram, soos hieronder gewys word.



Frekwensieveelhoeke is nuttig wanneer die verspreiding van twee of meer stelle data op dieselfde assestelsel vergelyk word.

wenk

Om 'n frekwensieveelhoek te stip:

- Stip die middelpunte van elke interval
- Verbind die middelpunte met reguitlyne
- Voeg 'n interval by die begin en einde van die data by, albei met 'n frekwensie van 0.
- Frekwensieveelhoeke is 'n geslote figuur, daarom moet dit by die x-as begin en eindig.

13.6 Kumulatiewe frekwensietabelle en grafieke (ogiewe)

1. Kumulatiewe frekwensietabelle

- Kumulatiewe frekwensietabelle gee vir ons 'n lopende totaal van die frekwensie. Ons tel dus die heeltyd by die frekwensie van die eerste interval tot by die laaste interval.
- Ons kan hierdie resultate in 'n kumulatiewe frekwensietabel aantoon.

bv. 11

In 'n Engelsklas het 30 leerders 'n toets uit 20 geskryf. Hier is 'n lys van hulle punte.

14; 10; 11; 19; 15; 11; 13; 11; 9; 11; 12; 17; 10; 14; 13; 17; 7; 14; 17; 13; 13; 9; 12; 16; 6; 9; 11; 11; 13; 20.

Punt uit 20	Telling	Frekwensie (aantal leerders)	Kumulatiewe frekwensie
6	/	1	1
7	/	1	1 + 1 = 2
8		0	2 + 0 = 2
9	///	3	2 + 3 = 5
10	//	2	5 + 2 = 7
11	~~////~~ /	6	13
12	//	2	15
13	~~////~~	5	20
14	///	3	23
15	/	1	24
16	/	1	25
17	///	3	28
18		0	28
19	/	1	29
20	/	1	30

wenk Tel heeltyd by die frekwensie van die vorige ry. Byvoorbeeld, 7 + 6 = 13

wenk Die laaste getal is dieselfde as die totale aantal leerders

Met hierdie stel data, sal dit beter wees om die data te **groepeer**.

Ons kan intervalle van 5 gebruik om 'n kumulatiewe frekwensietabel vir gegroepeerde data te maak.

Klasinterval	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
$1 < x \leq 5$	0	0
$5 < x \leq 10$	7	7
$10 < x \leq 15$	17	24
$15 < x \leq 20$	6	30

2. Kumulatiewe frekwensiegrafiek (ogief)

- Ons kan die kumulatiewe resultate van 'n kumulatiewe frekwensietabel met 'n **kumulatiewe frekwensiegrafiek** of **ogief** voorstel.
- Hierdie grafiek begin altyd op die x-as en vorm gewoonlik 'n S-vormige kromme en eindig met die kumulatiewe frekwensie (y-waarde).
- Die **eindpunt van elke interval** word teenoor die **kumulatiewe frekwensie** gestip.

bv. 12

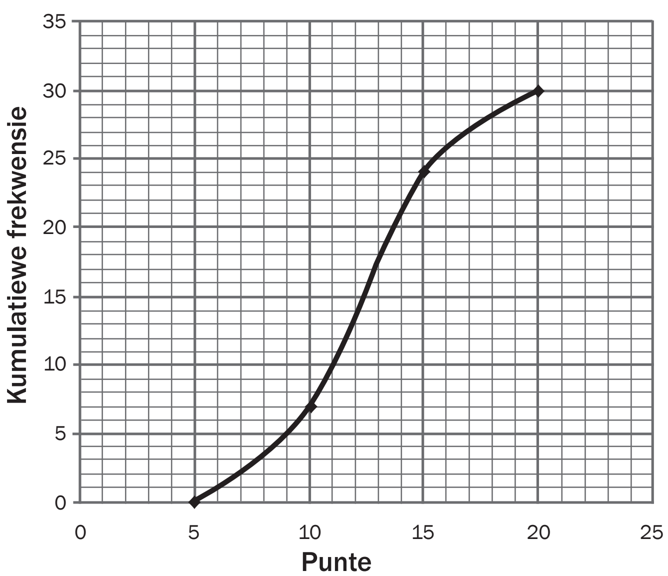
Stel die data in die kumulatiewe frekwensietabel van gegroepeerde data met 'n kumulatiewe frekwensiegrafiek voor.

- Op die x-as moet die punte 5; 10; 15; en 20 wees om die einde van elke interval te merk
- Die y-as stel die kumulatiewe frekwensie van 0 tot 30 voor.
- Om die punte te stip, gebruik ons die einde van elke klasinterval op die x-as en die kumulatiewe frekwensie op die y-as. Jy moet dus hierdie punte stip: (5; 0); (10; 7); (15; 24); (20; 30)
- Verbind die punte.

wenk

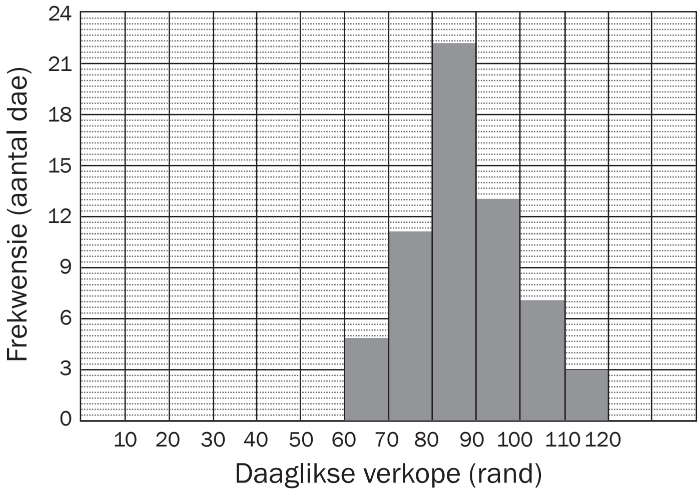
Om 'n ogief te stip:

- x-koördinaat – gebruik boonste limiet van elke interval.
- y-koördinaat – kumulatiewe frekwensie
- As die frekwensie van die eerste interval nie 0 is nie, sluit dan die interval voor die gegewe een in en maak sy frekwensie 0.



Aktiwiteit 5

'n Roomysverkoper het boek gehou van sy verkope vir Oktober en November 2012. Die daaglikse verkope in rand word in die histogram hieronder aangetoon.



1.1 Trek 'n kumulatiewe frekwensietabel vir die verkope in Oktober en November. (2)

1.2 Teken 'n ogief vir die verkope in Oktober en November. (3)

1.3 Gebruik jou ogief om die mediaanwaarde van die daaglikse verkope te bepaal. Verduidelik hoe jy jou antwoord gekry het. (1)

1.4 Skat die interval van die boonste 25% van die daaglikse verkope. (2)

[8]

Oplossings

1.1 Kumulatiewe frekwensietabel

Daaglikse verkope (in rand)	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
60 ≤ rand < 70	5	5
70 ≤ rand < 80	11	16
80 ≤ rand < 90	22	38 ✓ 1ste drie korrek
90 ≤ rand < 100	13	51
100 ≤ rand < 110	7	58
110 ≤ rand < 120	3	61 ✓ laaste drie korrek

(2)

✓ 1ste drie punte wat korrek gestip is

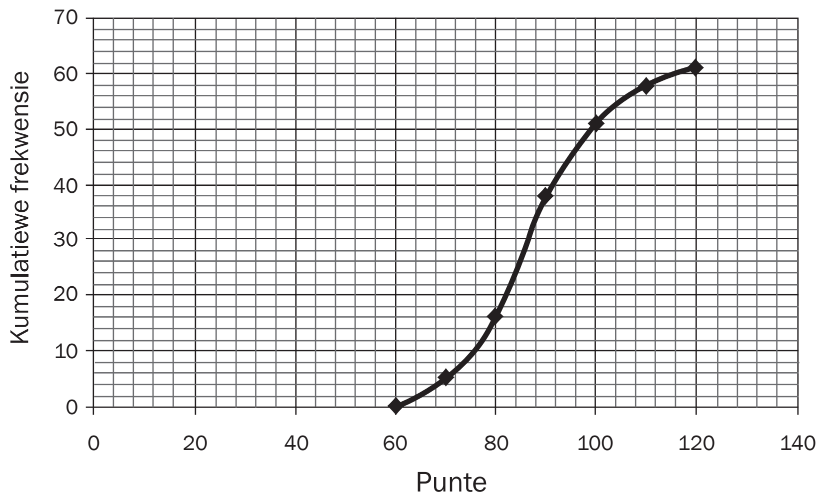
✓ laaste drie punte wat korrek gestip is

✓ beginnende by 0

wenk Ons kan die mediaan, die variasiewydte en die interkwartielvariasiewydte vanaf 'n kumulatiewe frekwensiegrafiek bepaal.

Ons kan nie die mediaan vanaf 'n kumulatiewe frekwensiegrafiek bepaal nie.

1.2



1.3 Daar is 61 datapunte, die mediaan is dus die 31ste datapunt. Ons kan die datapunt van die grafiek by 31 aflees. Dit gee 'n randwaarde van R87. ✓ (1)

1.4 Die boonste 25% lê bokant 75% van 61 = 45,75. ✓

Lees vanaf die y-as oor die grafiek en af tot by die x-as.
Die boonste 25% van die verkope lê in die interval:
$96 \leq$ verkope < 120 ✓ (2)

[8]

13.7 Variansie en standaardafwyking

Soms is die gemiddelde 'n nuttiger mate van sentrale neiging as die mediaan.

Die mate van verspreiding rondom die gemiddelde word die **variansie** en die **standaardafwyking** genoem.

1. Standaardafwyking

Die standaardafwyking is die vierkantswortel van (die som van die gekwadreerde verskille tussen elke telling en die gemiddelde gedeel deur die aantal tellings). Die formule vir standaardafwyking is:

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}}$ waar x elke individuele waarde is, $\bar{x}$ is die gemiddelde en n is die aantal waardes. Die simbool sigma $\sum$ beteken "die som van".

Hierdie formule sal op die datablad gegee word. Maak seker dat jy die formule behoorlik kan gebruik.

1.1 Bereken die standaardafwyking met die formule:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$$

1. Bepaal die gemiddelde van al die getalle in die stel data.
2. Bepaal elke waarde van $x - \bar{x}$. Met ander woorde, werk uit met hoeveel elkeen van hierdie waardes van die gemiddelde verskil (of daarvan afwyk).
3. Kwadreer elke afwyking. Bepaal elke waarde van $(x-\bar{x})^2$
4. Tel al die antwoorde bymekaar. Met ander woorde, bepaal $\sum (x-\bar{x})^2$.
5. Deel hierdie som deur die aantal waardes, n.
6. Jy het nou $\frac{\sum_1 (x-\bar{x})^2}{n}$. bepaal. Hierdie waarde word die **variansie** genoem.
7. Bepaal die **vierkantswortel van die variansie** om die **standaardafwyking** te kry $\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}}$

Deur hierdie stappe te volg, het jy die standaardafwyking met die formule bepaal.

bv. 13 **Bepaal die variansie en standaardafwyking**

Hierdie is die punte van 'n Wiskundetoets vir 'n Graad 11 klas van 20 leerders.

52	44	62	66	60	57	95	78	71	62
100	69	62	72	73	55	32	83	78	80

1. Bereken die gemiddelde vir die klas. (2)
2. Voltooi die tabel hieronder en gebruik dit om die standaard-afwyking van die punte te bereken. (3)
3. Watter persentasie van die leerders het binne een standaard-afwyking van die gemiddeld presteer? (2)

Oplossings

1. $\bar{x} = \dfrac{52+44+62+66+60+57+95+78+71+62+100+69+62+72+73+55+32+83+78+80}{20} = 67{,}55$ ✓

2.

Punt verkry (%)	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
52	52 – 67,55 = –15,55	$(-15{,}55)^2$ = 241,8
44	–23,55	554,6
62	–5,55	30,8
66	–1,55	2,4
60	–7,55	57,0
57	–10,55	111,3
95	27,45	753,5
78	10,45	109,2
71	3,45	11,9
62	–5,55	30,8
100	32,45	1053,0
69	1,45	2,1
62	–5,55	30,8
72	4,45	19,8
73	5,45	29,7
55	–12,55	157,5
32	–35,55	1263,8
83	15,45	238,7
78	10,45	109,2
80	12,45	155,0
	$\sum (x - \bar{x})^2$	**4 962,9**

wenk

Die kwadraat van $(x - \bar{x})$ hanteer die effek van die negatiewe tekens.

Op die einde bepaal ons die vierkantswortel van die hele antwoord om die effek van die vierkantswortel "om te keer".

$\sigma = \sqrt{\dfrac{4\,962{,}9}{20}} = 15{,}7526...$

$= 15{,}75$ ✓✓✓ Antwoord

(korrek tot twee desimale plekke)

3. Een standaardafwyking vanaf die gemiddeld lê tussen

$(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma) = (67{,}55 - 15{,}75; 67{,}55 + 15{,}75)$

$= (51{,}8; 83{,}3)$ ✓

16 tellings lê in die interval (51,8; 83,3)

16 uit 20 van die punte lê binne een standaardafwyking van die gemiddelde, $\frac{16}{20} \times 100 = 80\%$ ✓

NB

Ons kan sê hierdie is 'n verteenwoordigende stel data want meer as 66,6% lê binne een standaardafwyking vanaf die gemiddelde.

<u>Antwoord:</u> 80% van die leerders se punte lê binne een standaardafwyking vanaf die gemiddelde.

1.2 Stappe om die standaardafwyking met 'n wetenskaplike sakrekenaar te bereken:

Gebruik 'n Casio fx–82 ES PLUS sakrekenaar:

druk **Mode** dan **STAT** dan 1 – **VAR**

- tik al die data een vir een in en druk = na elkeen
- druk die oranje **AC** knoppie
- druk **shift STAT** dan **VAR**
- om die gemiddelde te bereken, druk **2:** $\bar{x}$.
- sodra al hierdie stappe voltooi is, druk **AC shift STAT** dan **VAR**
- druk nou **3: σ** om die standaardafwyking te bereken.

As jy die sakrekenaarstappe verstaan en dit behoorlik gebruik, sal jy dieselfde antwoord van 15,75 kry wat ons vantevore bepaal het. Oefen hierdie stappe sodat jy eksamenvoorbeelde met 'n sakrekenaar kan doen.

NB

- Die **interkwartielvariasiewydte** meet 'n verspreiding rondom die **mediaan**, dit het dus te doen met die posisies van data en *nie* hulle werklike waardes nie.
- Die **standaardafwyking** meet 'n verspreiding rondom die **gemiddelde**, en gebruik die werklike waardes van die data en nie net hulle posisies nie.

Aktiwiteit 6

Die data hieronder toon die energievlakke, in kilokalorieë per 100 g, van 10 verskillende versnaperinge aan.

440 520 480 560 615 550 620 680 545 490

(a) Bereken die gemiddelde energievlak van hierdie versnaperinge. (2)

(b) Bereken die standaardafwyking. (2)

(c) Die energievlakke, in kilokalorieë per 100 g, van 10 verskillende ontbytgrane het 'n gemiddelde van 545,7 kilokalorieë en 'n standaardafwyking van 28 kilokalorieë. Watter van die twee soorte kos toon 'n groter variasie in energievlakke? Tot watter gevolgtrekking kom jy? (2)

[6]

Oplossings

(a) Gemiddelde $= \frac{5500}{10} = 550$ kilokalorieë ✓✓ (2)

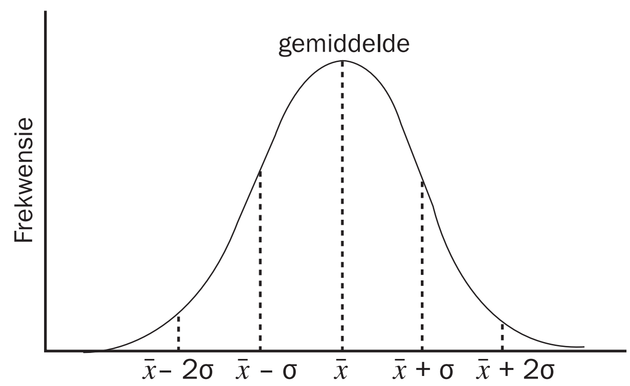
(b) $\sigma = 69{,}03$ kilokalorieë ✓✓ (2)

(c) Versnaperinge het 'n groter variasie. ✓ Die standaardafwyking vir versnaperinge is 69,03 kilokalorieë terwyl die standaardafwyking van ontbytgrane 28 kilokalorieë is. Die energievlakke van ontbytgrane is nader verspreid aan die gemiddelde as dié van die versnaperinge. ✓ (2)

[6]

2. Die normale verspreidingskromme

Die data kan op 'n grafiek gestip word wat die standaardafwykings aantoon. As die data simmetries rondom die gemiddelde verspreid is, vorm die waardes 'n **normale verspreidingskromme**:



13.8 Tweeveranderlike data en strooiingsdiagramme (strooiingsgrafieke)

- ’n **Strooiingsdiagram** is ’n grafiek wat die x- en y-asse gebruik om **tweeveranderlike** data voor te stel.
- Tweeveranderlike data beteken dat elke punt op die grafiek **twee veranderlikes** voorstel wat **onafhanklik** is van mekaar.
- In ’n strooiingsdiagram stip ons ’n punt vir elke paar koördinate en kyk na die algehele patroon of **tendens** in die data.
- Die punte in die data word vergelyk om te kyk of daar ’n korrelasie van een of ander aard of patroon (of tendens) in die data is.
- Wanneer ’n punt nie by die tendens van die ander punte pas nie, word dit ’n **uitskieter** genoem.
- Dit is maklik om **uitskieters** op ’n strooiingsdiagram of mond-en-snordiagram te identifiseer.
- Ons kan soms die tendens in die data met ’n lyn of kromme van **beste passing** voorstel. Die lyn of kromme kan voorgestel word deur ’n vergelyking wat lineêr, kwadraties, eksponensiaal, hiperbolies, ens. is.

bv. 14

’n Wetenskaponderwyser vergelyk die punte vir die halfjaareksamen met die punte vir finale eksamens wat 11 leerders behaal het.

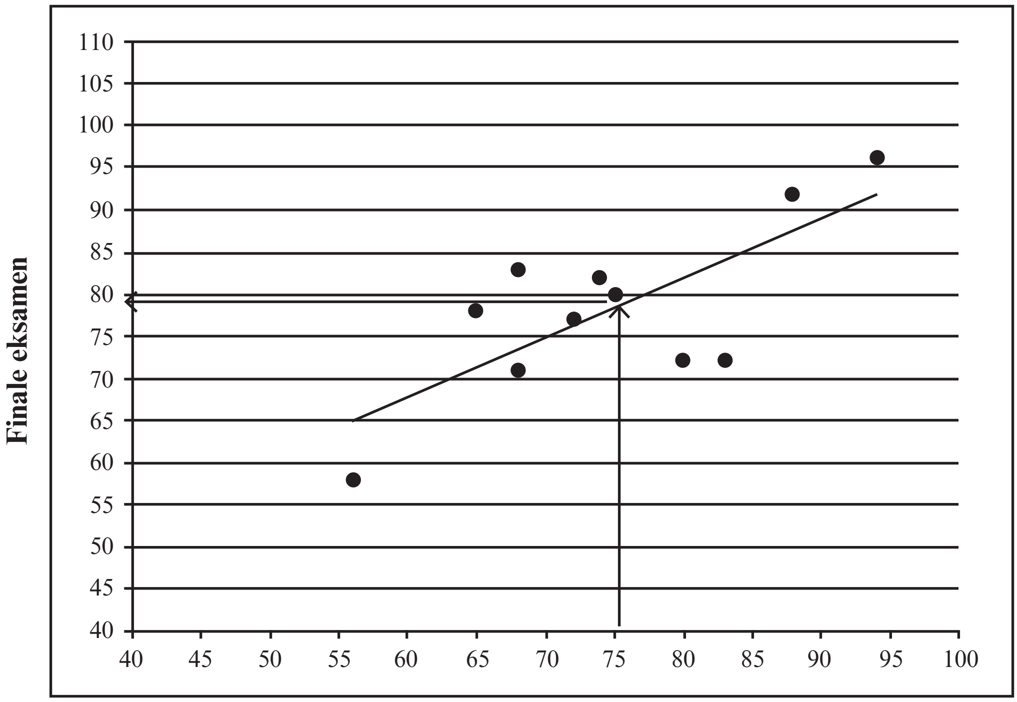
Halfjaarpunte	80	68	94	72	74	83	56	68	65	75	88
Finale punte	72	71	96	77	82	72	58	83	78	80	92

1. Teken ’n strooiingsdiagram van hierdie data. (3)
2. Beskryf die kromme van beste passing. (2)
3. Gebruik die strooiingsdiagram om die finale punt van ’n leerder te skat wat ’n halfjaarpunt van 75% gekry het. (1)

[6]

Oplossings

1.



Halfjaareksamenpunte

✓✓✓ alle punte korrek gestip

2. Die "kromme" of lyn van beste passing is 'n reguitlyn. ✓ Daar moet ongeveer vyf kolletjies bo die lyn en vyf kolletjies onder die lyn wees. ✓

3. 'n Lyn vanf 75 op die *x*-as na die tendenslyn neem ons na ongeveer 78 op die *y*-as. Ons kan dus voorspel dat 'n leerder met 'n halfjaarpunt van 75% kan verwag om ongeveer 78% in die finale eksamen te kry. ✓

[6]

Aktiwiteit 7

Die buitetemperatuur (in °C) in die middel van die dag word gemeet. Dit word vergelyk met die aantal eenhede elektrisiteit wat gebruik word om ’n huis elke dag te verhit.

Temp in °C	7	11	9	2	4	7	0	10	5	3
Eenhede elektrisiteit gebruik	32	20	27	37	32	28	41	23	33	36

(a) Teken ’n strooiingsdiagram om hierdie data voor te stel. (3)

(b) Trek ’n lyn van beste passing. (1)

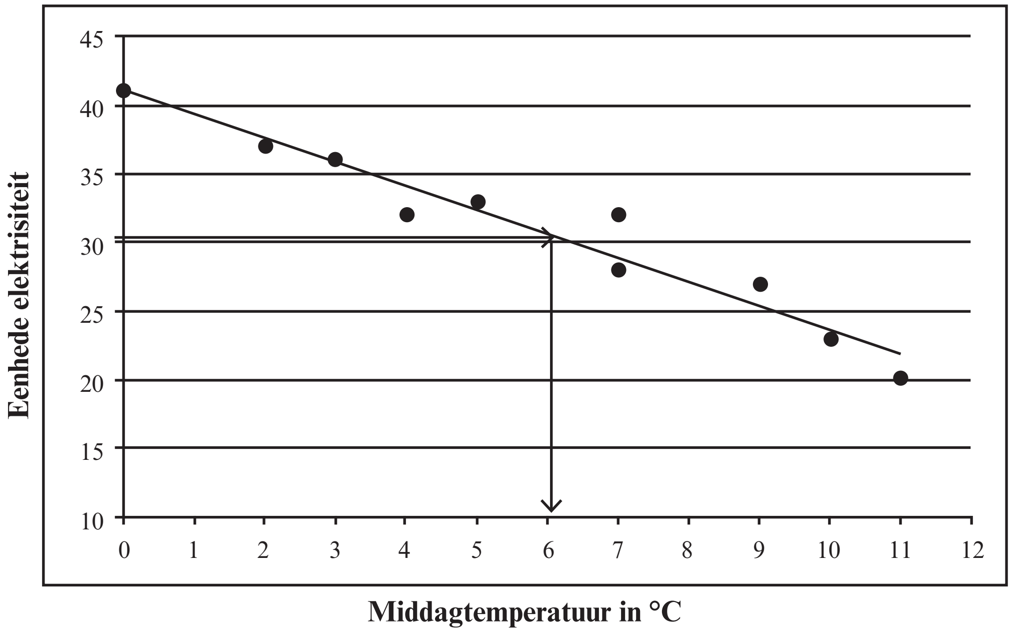
(c) Gebruik die lyn van beste passing om die middagtemperatuur te voorspel wanneer 30 eenhede elektrisiteit gebruik word. (1)

[5]

Oplossings

(a) Grafiek ✓✓✓ (3)

(b) Lyn van beste passing ✓ (1)



(c) As die middagtemperatuur 6,25°C is, word daar waarskynlik ongeveer 30 eenhede ✓ elektrisiteit in die huis gebruik. (1)

[5]

13.9 Die lineêre regressielyn (of die kleinste-kwadrate-regressielyn)

Die lyn van beste passing vir 'n stel tweeveranderlike numeriese data is die lineêre regressielyn. Tot dusver het ons hierdie tendenslyn op 'n strooiingsdiagram gesien. Nou gebruik ons 'n wetenskaplike sakrekenaar om die vergelyking van hierdie lyn te bepaal.

Ons ken die vergelyking van 'n reguitlyn: $y = mx + c$

Statistiek (soos gebruik op die CASIO x-82ES PLUS sakrekenaar) gebruik **y = A + Bx**, waar B die gradiënt is en A die afsnit op die y-as van die reguitlyn van beste passing.

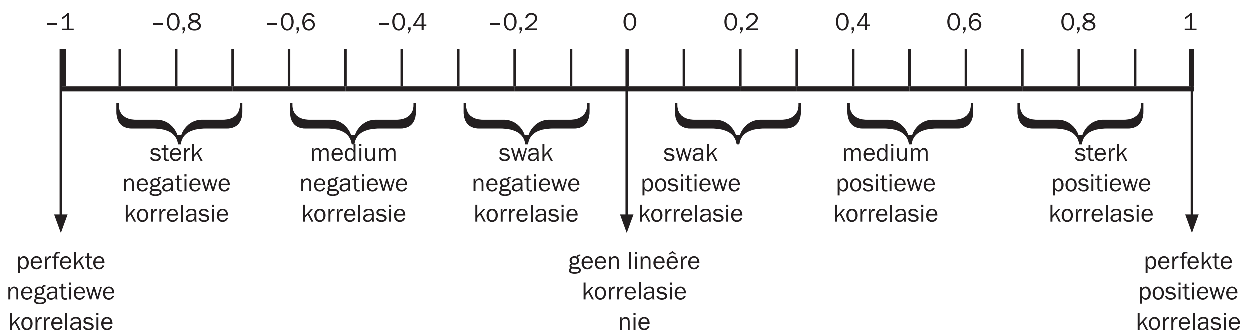
Die gradiënt is dus B in plaas van m en die y-afsnit is A in plaas van c.

Die Regressiekoëffisiënt *"r"*

Hierdie is 'n statistiese getal wat die sterkte van die korrelasie (verwantskap) tussen twee stelle data meet.

- Hierdie getal word met 'n sakrekenaar bereken uit twee stelle data.
- r lê altyd tussen –1 en +1.
- Hoe nader r aan –1 is, hoe sterkter is die negatiewe korrelasie.
- Hoe nader r aan +1 is, hoe sterkter is die positiewe korrelasie.
- As r = 0, is daar geen korrelasie tussen die twee stelle data nie.

Die getallelyn toon die r-waardes en die sterkte van die korrelasie tussen tweeveranderlike data aan.

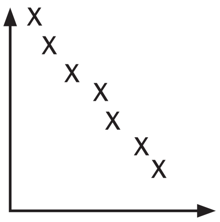


NB

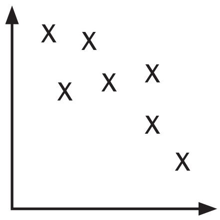
Ons bestudeer net die r-waarde van tweeveranderlike data wanneer die lyn van beste passing 'n reguitlyn is.

'n Negatiewe korrelasie beteken dat as x toeneem, neem y af.

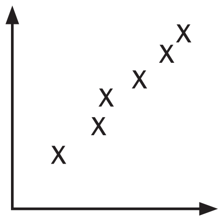
Hoe nader die punte rondom die lyn saamgetros is, hoe sterkter is die korrelasie.



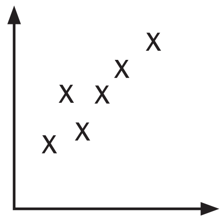
'n Sterk negatiewe korrelasie



'n Swakker negatiewe korrelasie



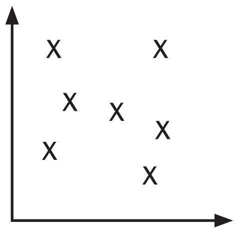
'n Sterk positiewe korrelasie



'n Swakker positiewe korrelasie

'n Positiewe korrelasie beteken dat as x toeneem neem y ook toe.

'n Korrelasie van nul beteken dat daar geen verwantskap tussen x en y is nie.



bv. 15

'n Dieselenjin draai teen 'n tempo van x revolusies per minuut. Die ooreenstemmende perdekrag van die enjin word gemeet deur y in die tabel hieronder:

x (revolusies per minuut)	400	500	600	700	750
y (perdekrag)	580	1 030	1 420	1 880	2 100

1. Bepaal die vergelyking van die kleinste-kwadrate-regressielyn: $y = A + B\,x$ (korrek tot twee desimale plekke).

2. Bepaal die regressiekoëffisiënt r. Bespreek die korrelasie tussen x en y.

3. Gebruik hierdie regressielyn om die kraguitset te skat wanneer die enjin teen 800 revolusies per minuut loop.

4. Ongeveer hoe vinnig loop die enjin wanneer dit 'n uitset van 1 200 perdekrag het?

Oplossings

1. Gebruik 'n sakrekenaar
- Mode 2: STAT
- 2: A + B x
- Druk die x-waardes eerste in:
- 400 =; 500 =; 600 =; 700 =; 750 =
- Gebruik pyltjies om regs na die y-kolom te gaan en op om langs 400 te begin.
- Druk y-waardes in:
- 580 =; 1030 =; 1420 =; 1880 =; 2100=
- Druk (oranje) AC knoppie
- Druk SHIFT STAT (by 1)
- Druk 5: Reg
- Druk 1:A = en kry –1145,792683

Dit is die y-afsnit van die regressielyn
- Druk die oranje AC knoppie
- Druk SHIFT STAT
- Druk 5:Reg
- Druk nou 2:B = en kry 4,318292683

Dit is die gradiënt van die regressielyn

Antwoord:
Die kleinste-kwadrate-regressielyn:
$\boldsymbol{y = -1\,145{,}8 + 4{,}32\,x}$ (korrek tot twee desimale plekke)

2. Hou al die inligting in die sakrekenaar van 1.
- Druk AC
- SHIFT STAT
- 5:REG
- Dan 3: $\boldsymbol{r = 0{,}9996821357}$

Daar is 'n sterk positiewe korrelasie tussen x en y (r is baie naby aan +1)

3. Vervang $x = 800$ in die vergelyking van die lyn van beste passing:
$y = -1\,145{,}8 + 4{,}32(800)$
$y = 2\,310{,}2$
800 revolusies sal 2 310,2 uitset van perdekrag gee.

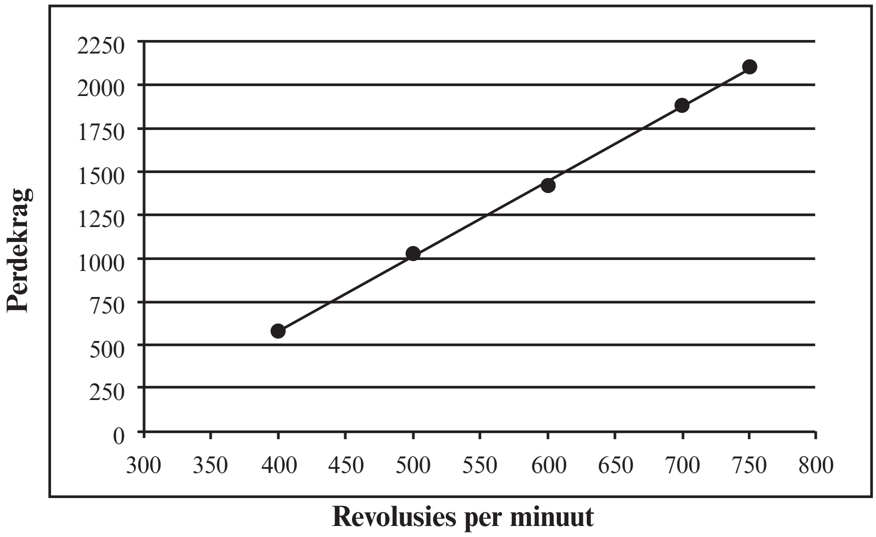
4. Laat $y = 1\,200$

$1\,200 = -1\,145{,}8 + 4{,}32\,x$
$1\,200 + 1\,145{,}8 = 4{,}32\,x$
$2\,345{,}8 = 4{,}32\,x$
$\frac{2\,345{,}8}{4{,}32} = x$
$543{,}0092593 = x$

Daar is ongeveer 543 revolusies per minuut vir 'n uitset van 1 200 perdekrag.

Onthou om die MODE weer na 1:COMP te verander wanneer normale berekeninge gedoen word

Die strooiingsdiagram en die lyn van beste passing wys die tendens in die verwantskap tussen die revolusies en die perdekrag.



Aktiwiteit 8

1. Pick 'n Pay wil 'n opname doen van hoe lank in sekondes (y) dit 'n teller neem om items (x) by die kasregister te skandeer.

Die tabel toon die resultate van 9 kopers.

Kopers	A	B	C	D	E	F	G	H	I
x (aantal items)	5	8	12	15	15	17	20	21	25
y (tyd in sekondes)	3	11	9	6	15	13	25	15	13

a) Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die lyn van beste passing (die regressielyn of die kleinste-kwadrate-regressielyn) korrek tot twee desimale plekke te bepaal. (3)

b) Bereken die waarde van r, die korrelasiekoëffisiënt vir die data. Wat kan jy sê oor die korrelasie tussen x en y? (3)

c) Hoe lank sal dit die teller neem om 21 items by die kasregister te skandeer? (2)

d) Hoeveel items kan 'n teller in 21,28 sekondes skandeer? (2)

2. 'n Restaurant wil weet wat die verwantskap is tussen die aantal klante en die aantal hoenderpasteie wat bestel word.

Aantal klante (x)	5	10	15	20	25	30	35	40
Aantal hoenderpasteie (y)	3	5	10	10	15	20	20	24

a) Bepaal die vergelyking van die regressielyn korrek tot twee desimale plekke. (3)

b) Bepaal die waarde van r, die korrelasiekoëffisiënt. Beskryf die soort en sterkte van die korrelasie tussen die aantal mense en die aantal hoenderpasteie wat bestel word. (3)

c) Bepaal hoeveel hoenderpasteie 100 mense sal bestel. (2)

d) As hulle net 12 hoenderpasteie oor het, hoeveel mense kan hulle bedien? (2)

[20]

Oplossings

1. a) A = 2,68 ✓
B = 0,62 ✓
$y = 2,68 + 0,62x$ ✓ (3)

b) $r = 0,62847\ldots. = 0,63$ ✓✓
Dit is 'n swak positiewe korrelasie ✓ (3)

c) $y = 2,68 + 0,62(21)$ ✓ $= 15,7$
(ongeveer 16 sekondes) ✓ (2)

d) $21,28 = 2,68 + 0,62\,x$ ✓
$21,28 - 2,68 = 0,62\,x$
$\frac{18,6}{0,62} = x$
$30 = x$

30 items kan in 21,28 sekondes geskandeer word. ✓ (2)

2. a) A = –0,39285… ✓
B = 0,61190 ✓
$y = -0,4 + 0,6\,x$ ✓ (3)

b) $r = 0,9866\ldots$ ✓✓
Dit is 'n baie sterk positiewe korrelasie ✓
(r is naby aan +1) (3)

c) $y = -0,4 + 0,6\,x$
$y = -0,4 + 0,6(100)$ ✓
$y = 59,6$
Ongeveer 60 hoenderpasteie is deur 100 mense bestel. ✓ (2)

d) $12 = -0,4 + 0,6\,x$ ✓
$12 + 0,4 = 0,6\,x$
$\frac{12,4}{0,6} = x$
$20,6\ldots = x$
Ongeveer 21 mense kan 12 pasteie bestel. ✓ (2)

[20]

Aktiwiteit 8 (vervolg)

3. ’n Platemaatskappy ondersoek die verwantskap tussen die aantal kere wat ’n CD oor ’n nasionale radiostasie gespeel word en die nasionale verkope van dieselfde CD in die volgende week. Die data hieronder is uit ’n ewekansige steekproef van CD’s versamel. Die verkoopsyfers is afgerond tot die naaste 50.

Aantal kere wat CD gespeel is	47	34	40	34	33	50	28	53	25	45
Weeklikse verkope van die CD	3 950	2 500	3 700	2 800	2 900	3 750	2 300	4 400	2 200	3 400

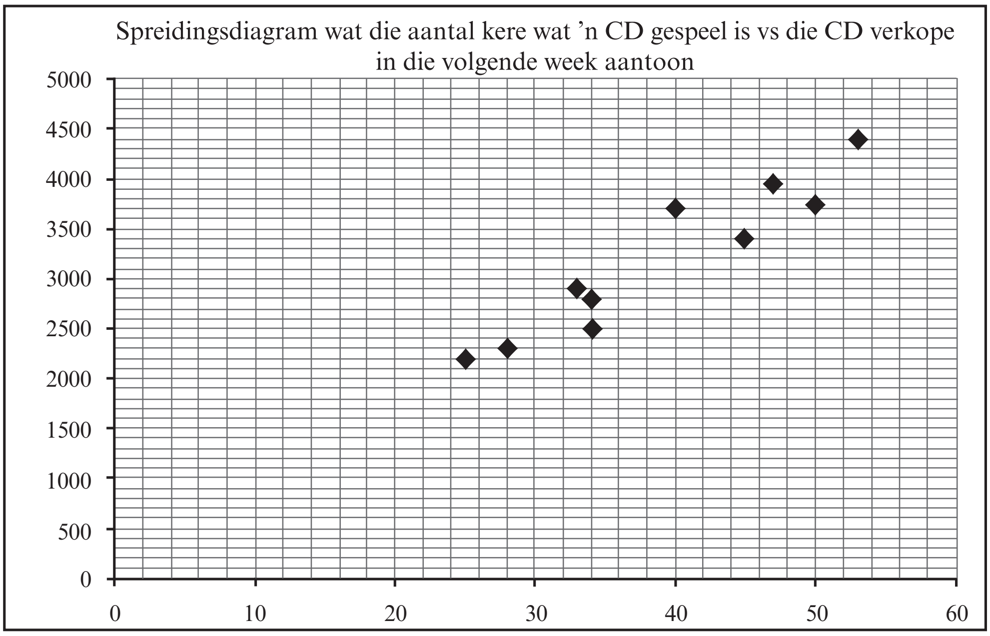
a) Identifiseer die onafhanklike veranderlike. (1)
b) Teken ’n strooiingsdiagram van hierdie data. (3)
c) Bepaal die vergelyking van die kleinste-kwadrate-regressielyn. (3)
d) Bepaal die korrelasiekoëffisiënt. (2)
e) Voorspel, korrek tot die naaste 50, die weeklikse verkope vir ’n CD wat die radiostasie die vorige week 45 keer gespeel het. (2)
f) Lewer kommentaar oor die sterkte van die verwantskap tussen die veranderlikes. (1)

[12]

Oplossings

3. a) die aantal kere wat die CD gespeel is ✓ (1)

b)



✓✓✓ (3)

c) $a = 264{,}326$ ✓
$b = 75{,}21$ ✓
$y = 264{,}33 + 75{,}21x$ ✓ (3)

d) $r = 0{,}95$ ✓✓ (2)

e) $y = 264{,}33 + 75{,}21x(45)$ ✓ (vervanging)
$\approx 3\ 648{,}78$
$\approx 3\ 648$
$\approx 3\ 650$ (tot die naaste 50) ✓ (2)

f) Daar is 'n baie sterk positiewe verwantskap tussen die aantal kere wat 'n CD gespeel is en die verkope van daardie CD in die volgende week. ✓ (1)

[12]

Wat jy moet kan doen:

1. Bepaal die gemiddelde, mediaan en modus in gegroepeerde of ongegroepeerde data
2. Teken en ontleed die volgende metodes om data voor te stel:
   - mond-en-snordiagram
   - histogramme
   - frekwensieveelhoeke
   - kumulatiewe frekwensiekrommes (ogiewe)
3. Bereken die variansie en die standaardafwyking van 'n stel ongegroepeerde data.
4. Lewer kommentaar oor of 'n stel data simmetriese of skeefgetrek is, deur die voorstelling van die data te ontleed.
5. Identifiseer uitskieters in 'n stel data deur na die mond-en-snordiagram of strooiingsdiagram te kyk.
6. Bepaal die vergelyking van die lyn van beste passing van tweeveranderlike data met 'n sakrekenaar (Hierdie lyn kan ook die kleinste-kwadrate-regressielyn genoem word)
7. Bepaal die regressiekorrelasiekoëffisiënt "r"
8. Gebruik die lyn van beste passing om gevolgtrekkings te maak.

Die *Mind the Gap* studiegids help jou om die sprong te maak en hard te studeer om die Graad 12-eksamen suksesvol af te lê.

Hierdie publikasie is nie te koop nie.

Inbelsentrum 0800 202 833

basic education

Departement:
Basiese Onderwys
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA